LA REPRÉSENTATION PAR DES INTÉGRALES DÉFINIES DE QUELQUES SÉRIES ÉLÉMENTAIRES DE L'ANALYSE

Autor(en): **Cioranesco, N.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1929)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-22602

LA REPRÉSENTATION
PAR DES INTÉGRALES DÉFINIES
DE
QUELQUES SÉRIES ÉLÉMENTAIRES DE L'ANALYSE

PAR

N. CIORANESCO (Bucarest).

---

1. — Considérons une série des puissances $\sum_0^\infty a_n x^n$ (1) convergente par exemple pour $|x| < 1$. Il est évident qu'on peut représenter une telle série sous la forme d'une intégrale définie, où x entre comme paramètre. Inversement dans la plupart des cas, on calcule une intégrale définie pour une valeur particulière du paramètre et avec une approximation donnée, en la développant en série.

Il semblerait donc superflu de chercher à donner pour une série telle que (1), ou pour une série numérique, des expressions intégrales, qui en général ne nous renseignent pas plus sur la fonction représentée par (1), que la série même.

Mais, en dehors d'une certaine élégance que peuvent revêtir certaines expressions intégrales, une telle expression est plus saisissante pour l'esprit et peut conduire à des relations remarquables.

Dans ce qui suit, on donne des expressions intégrales, analogues à celle de Riemann pour la fonction $\zeta(s)$, pour les séries (1) dont les coefficients sont de la forme:

$$a_n = \frac{1}{(n+a_1)^{\alpha_1}(n+a_2)^{\alpha_2}\ldots(n+a_p)^{\alpha_p}\log^{\beta_1}(n+b_1)\ldots\log^{\beta_q}(n+b_q)\ldots\log_k^{\lambda_\gamma}(n+l_\gamma)}, \tag{2}$$

où

$$\alpha_i,\ \beta_j\ \ldots\ \lambda_l \geqq 0 \qquad \text{et} \qquad \log_k A = \log(\log_{k-1} A).$$

On peut obtenir pour ces séries des expressions intégrales de la manière la plus simple, en n'exigeant que la connaissance de la définition de la fonction $\Gamma(a)$ d'Euler et l'expression de la somme d'une progression géométrique.

2. — On sait que:

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx \tag{3}$$

ou bien :

$$\int_0^\infty e^{-x^{1/a}} dx = \Gamma(a+1) .$$

Par conséquent:

$$\int_0^\infty e^{-kx^{1/\alpha}} dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k^\alpha} \tag{4}$$

où k est un nombre dont la partie réelle est positive. $Rk > 0$.

Posons dans (4) $k = 1 + \omega, 2 + \omega \ldots n + \omega, \ldots$ et faisons après la somme de 1 à n des expressions ainsi obtenues. Après multiplication préalable par x^p. On obtient:

$$\Gamma(1+\alpha) \sum_1^n \frac{x^p}{(p+\omega)^\alpha} = \int_0^\infty x e^{-\omega t^{1/\alpha}} \cdot \frac{1 - x^x e^{-nt}}{1 - xe^{-t^{1/\alpha}}} dt .$$

En faisant $n \to \infty$, on a, après changement de notation:

$$\sum_1^\infty \frac{x^{n-1}}{(n+\omega)^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{u^{s-1} e^{-\omega u}}{e^u - x} du , \tag{a}$$

relation bien connue qui généralise celle de Riemann, qui s'obtient pour $x = 1$, $\omega = 0$, $Rs > 1$.

Dans la même expression (4), qui est à la base de toutes les relations que nous obtenons, faisons $k = \log(n+\omega)$. On a alors:

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\log^\alpha(n+\omega)} = \int_0^\infty e^{-t^{1/\alpha}\log(n+\omega)} dt = \int_0^\infty \frac{dt}{(n+\omega)^{t^{1/\alpha}}} .$$

Donc:

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(n+\omega)^s \log^\alpha(n+\omega)} = \int_0^\infty \frac{dt}{(n+\omega)^{s+t^{1/\alpha}}} .$$

Multiplions par x^{n-1} et faisons la somme par rapport à n de 1 à l' ∞, on obtient, en tenant compte de (a) :

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n+\omega)^s \log^{\alpha}(n+\omega)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{v^{\alpha-1}\,dv}{\Gamma(s+v)} \int_0^{\infty} \frac{u^{v+s-1}\,.\,e^{-\omega u}}{e^u - x}\,du\,, \tag{b}$$

qui est convergente aussi pour $x = 1$ si R$s > 1$.

De la même manière, en faisant $k = \log\log(n+\omega) = \log_2(n+\omega)$ dans (4) et en tenant compte de (b) on trouve que:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n+\omega)^s \log^{\alpha}(n+\omega) \log_2^{\beta}(n+\omega)} =$$

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\infty} \frac{v^{\beta-1}\,dv}{\Gamma(\alpha+v)} \int_0^{\infty} \frac{u^{v+\alpha-1}\,du}{\Gamma(s+u)} \int_0^{\infty} \frac{t^{u+s-1}\,.\,e^{-\omega t}\,dt}{e^t - x} \tag{c}$$

et ainsi de suite, pour toute série de Bertrand généralisée de la manière précédente. Une telle série, dont le terme général contient $\log_k^{\lambda}(n+\omega)$ au dénominateur, peut s'exprimer avec une intégrale $(k+1)$—uple et qui est facile à former.

3. — Considérons les deux relations:

$$\int_0^{\infty} e^{-k\sigma^{1/\alpha}}\,d\sigma = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k^{\alpha}}\,; \qquad \int_0^{\infty} e^{-h\tau^{1/\beta}}\,d\tau = \frac{\Gamma(\beta+1)}{h^{\beta}}\,.$$

En les multipliant, on obtient:

$$\int_0^{\infty}\!\!\int_0^{\infty} e^{-(k\sigma^{1/\alpha}+h\tau^{1/\beta})}\,d\sigma\,d\tau = \frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)}{k^{\alpha}\,.\,h^{\beta}}\,. \tag{5}$$

Si l'on fait ici $k = n + a_1$, $h = n + a_2$, $\alpha = s_1$, $\beta = s_2$ et on fait la somme de 1 à l' ∞ après multiplication avec x^{n-1}, on obtient (après le même changement de variable):

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n+a_1)^{s_1}(n+a_2)^{s_2}} = \frac{1}{\Gamma(s_1)\,\Gamma(s_2)} \int_0^{\infty}\!\!\int_0^{\infty} \frac{u^{s_1-1}\,v^{s_2-1}\,e^{-a_1u-a_2v}}{e^{u+v}-x}\,du\,dv \tag{d}$$

qui est une autre généralisation de la relation de Riemann et de la fonction $\zeta(s)$, au champ de deux variables s_1, s_2. C'est un exercice facile que de voir comment (d) se réduit à (a) lorsque $a_1 = a_2 = \omega$, $s_1 + s_2 = s$.

De la même manière on obtient la relation suivante:

$$\sum_1^\infty \frac{x^{n-1}}{(n+a_1)^{s_1}(n+a_2)^{s_2}(n+a_3)^{s_3}} =$$

$$\frac{1}{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)\Gamma(s_3)} \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{u^{s_1-1} v^{s_2-1} w^{s_3-1} e^{-a_1u-a_2v-a_3w}}{e^{u+v+w}-x} du\, dv\, dw \qquad (e)$$

et ainsi de suite.

Considérons dans (d) le cas particulier suivant: $a_1 = a.i$, $a_2 = -a.i$, $s_1 = s_2 = s$ et après changement de i en $-i$ et en faisant la somme (on peut supposer pour simplifier x et s réels) on obtient:

$$\sum_1^\infty \frac{x^{n-1}}{(n^2+a^2)^s} = \frac{1}{\Gamma^2(s)} \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{(uv)^{s-1}\cos a(u-v)}{e^{u+v}-x} du\, dv \qquad (f)$$

qui pour $a = 0$, $x = 1$ se réduit à $\zeta(2s)$.

De même on obtient:

$$\sum_1^\infty \frac{x^{n-1}}{(n+a_1)^s \log^\alpha(n+b_1)} =$$

$$\frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{u^{s-1} v^{\alpha-1} e^{-a_1 u}}{\Gamma(v)} du\, dv \int_0^\infty \frac{t^{v-1} e^{-b_1 t}}{e^{u+t}-x} dt \qquad (g)$$

et, de proche en proche, toujours de la même manière, on obtient des expressions intégrales, pour toute série dont les coefficients sont de la forme (2). Sans insister davantage sur ces relations, qui ne présentent aucune sorte de difficultés, je laisse au lecteur le soin d'établir nombre d'identités remarquables entre intégrales multiples, qui peuvent s'obtenir par simple dérivations ou intégration par rapport à x, dans les deux membres et par comparaison des résultats obtenus.

Il est possible d'ailleurs que beaucoup de ces relations soient connues depuis longtemps, mais, à notre connaissance celle-ci est la manière la plus simple et à la fois la plus générale de les obtenir toutes de proche en proche et nous croyons qu'elle constitue un excellent exercice pour les débutants de l'Analyse. C'est à eux que nous avons pensé en écrivant ces lignes.

Bucarest, 13 septembre 1929.

SUR LES TRANSFORMATIONS LINÉAIRES

PAR

Luca TEODORIU (Bucarest).

---

1. — Lorsqu'un milieu continu se déplace et se déforme d'une manière continue, on sait que ses éléments obéissent à certaines lois géométriques qui résultent de la continuité et de l'existence des dérivées [1]. Mais l'hypothèse d'existence des dérivées est quelquefois superflue dans beaucoup de problèmes relatifs à la question citée. Le but de cette note est de donner seulement quelques exemples simples à l'appui de cette affirmation.

2. — Soient

$$X_i = f_i(x_1, x_2, x_3) \qquad i = 1, 2, 3 \tag{1}$$

les formules de transformation qui donnent à l'instant t les coordonnées d'un point X, l'homologue dans le milieu transformé d'un point x, du milieu primitif.

Les fonctions X_i sont uniformes et continues dans l'intérieur du milieu primitif et inversement x_i sont des fonctions uniformes et continues des X_i dans le milieu transformé.

---

[1] Voir le mémoire de M. COSSERAT dans les *Annales de la Faculté de Toulouse*, tome X.