Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 28 (1929)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UN THÉORÈME DE WILSON

Autor: Toscano, Letterio

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-22604

SUR UN THÉORÈME DE WILSON

PAR

Letterio TOSCANO (à Messine).

---

1. — Sur le développement de $n! = 1.2\ldots n$ on connaît la relation fondamentale de LEGENDRE

$$n! = n^n - \binom{n}{1}(n-1)^n + \binom{n}{2}(n-2)^n - \ldots$$
$$+ (-1)^{n-2}\binom{n}{2}2^n + (-1)^{n-1}\binom{n}{1}, \qquad (1)$$

avec $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$, amplement étudiée dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*[1], dans le *Giornale di Matematiche di Battaglini*[2], dans *La Matematica Elementare*[3], dans le *Bollettino dell' Unione Matematica Italiana*[4]. Une démonstration de la (1) peut être lue dans les *Lezioni di Calcolo Infinitesimale*, par E. PASCAL (Part. III, Calcolo delle variazioni e delle differenze finite, p. 231; 2me édition, Hœpli, Milano, 1918), fondée sur les différences finies de O^n. Mais on peut faire déduire (1) de relations plus générales.

Ainsi, si

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

est un polynome entier par rapport à x, on a

$$f(x) - \binom{n}{1}f(x+h) + \binom{n}{2}f(x+2h) - \ldots$$
$$+ (-1)^n f(x+nh) = (-1)^n a_0 n!\, h^n. \qquad (2)$$

---

[1] Années 1895, p. 165; 1896, pp. 26 et 299; 1897, p. 59; 1899, pp. 51 et 284; 1900, pp. 22 et 280; 1901, p. 164.
[2] T. 31, 1894; T. 40, 1902.
[3] Année 3, 1924, p. 123.
[4] Année 6, 1927, p. 187.

Et avec $h = -1$, $f(x) = x^n$, $x = n$ on retrouve la (1).

De plus, si

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

sont n nombres arbitrairement choisis et si nous posons

$$\begin{aligned} \rho_1^p &= \alpha_1^p + \alpha_2^p + \ldots + \alpha_n^p \\ \rho_2^p &= (\alpha_1 + \alpha_2)^p + (\alpha_1 + \alpha_3)^p + \ldots + (\alpha_{n-1} + \alpha_n)^p \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \rho_n^p &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)^p , \end{aligned}$$

on a les formules

$$\left\{ \begin{aligned} &\rho_n^p - \rho_{n-1}^p + \rho_{n-2}^p - \ldots + (-1)^{n-1} \rho_1^p = 0 \qquad p < n \\ &\rho_n^n - \rho_{n-1}^n + \rho_{n-2}^n - \ldots + (-1)^{n-1} \rho_1^n = n!\ \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \end{aligned} \right. \tag{3}$$

et avec

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = a ,$$

on trouve par conséquent

$$\begin{aligned} &n^p - \binom{n}{1}(n-1)^p + \binom{n}{2}(n-2)^p - \ldots = 0 \qquad p < n \\ &n^n - \binom{n}{1}(n-1)^n + \binom{n}{2}(n-2)^n - \ldots = n! \, . \end{aligned}$$

Les expressions (3) ont été établies par N. AGRONOMOF (de Vladivostok) dans la Note sur quelques formules concernant la formule

$$\sum \binom{n}{k} (n-k)^n = n!$$ [1]

2. — Nous démontrons ici (2) et après un théorème de *Wilson* par un théorème de *Fermat* et par la relation (1) de *Legendre*.

Considérons la différence première $f(x+h) - f(x)$ de la fonction $f(x)$, et représentons la par $\Delta^{(1)} f(x)$.

---

[1] *Bollettino dell' Unione Matematica Italiana*, Année 6, 1927, p. 187. Cette note fut publiée en réponse à la demande proposée du *Bollettino dell' Unione Matematica Italiana* (Année 6, 1927, p. 36) de trouver des relations générales d'où on peut déduire (1).

On a

$$\Delta^{(1)}f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$\Delta^{(2)}f(x) = f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)$$

$$(-1)\,\Delta^{(3)}f(x) = f(x) - 3f(x+h) + 3f(x+2h) - f(x+3h)$$

$$\Delta^{(4)}f(x) = f(x) - 4f(x+h) + 6f(x+2h) - 4f(x+3h) + f(x+4h)$$

et par la méthode d'induction

$$(-1)^n\Delta^{(n)}f(x) = f(x) - \binom{n}{1}f(x+h) + \binom{n}{2}f(x+2h) - \dots + (-1)^n f(x+nh)\,.$$

Si

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

on a

$$\Delta^{(n)}f(x) = a_0\, n\,!\; h^n$$

et de là la (2)

Autrement par le théorème de Lagrange sur les dérivées on a

$$\Delta^{(1)}f(x) = hf'(x+\theta'h)$$

avec $0 < \theta' < 1$;

$$\begin{aligned}\Delta^{(2)}f(x) &= h\left\{f'(x+h+\theta'h) - f'(x+\theta'h)\right\}\\ &= h^2f''(x+\theta''h)\ ;\end{aligned}$$

et enfin

$$\Delta^{(n)}f(x) = h^n f^{(n)}(x+\theta^{(n)}h)\,.$$

Mais

$$f^{(n)}(x+\theta^{(n)}h) = a_0\, n\,!$$

et de là suit la formule (2).

3. — Nous supposons $n > 2$ nombre premier et si a n'est pas multiple de n, le nombre $a^{n-1} - 1$ est divisible par n (Fermat).

Ainsi

$$2^{n-1} = 1 + nB' \qquad (n-2)^{n-1} = 1 + nB$$

$$3^{n-1} = 1 + nC' \qquad (n-3)^{n-1} = 1 + nC$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

étant B, B′, ..., C, C′,... nombres entiers.

En outre $(n-1)^n = (-1)^n + nA$ avec A entier.

Alors la relation de LEGENDRE, divisée par n, nous donne

$$(n-1)\,! = n^{n-1} + (-1)^{n+1} - nA + \binom{n-1}{2}(1+nB) - \binom{n-1}{3}(1+nC) + \dots$$
$$\dots + (-1)^{n-3}\binom{n-1}{2}(1+nC') + (-1)^{n-2}\binom{n-1}{1}(1+nB') + (-1)^{n-1}$$

et de là

$$(n-1)\,! = \left\{ n^{n-1} - nA + \binom{n-1}{2}nB - \binom{n-1}{3}nC + \dots + (-1)^{n-3}\binom{n-1}{2}nC' + (-1)^{n-2}\binom{n-1}{1}nB' \right\} + \left\{ (-1)^{n-1} + \binom{n-1}{2} - \binom{n-1}{3} + \dots + (-1)^{n-3}\binom{n-1}{2} + (-1)^{n-2}\binom{n-1}{1} + (-1)^{n-1} \right\}.$$

Mais

$$(-1)^{n-1} + \binom{n-1}{2} - \binom{n-1}{3} + \dots + (-1)^{n-3}\binom{n-1}{2} + (-1)^{n-2}\binom{n-1}{1} + (-1)^{n-1} =$$
$$= \left\{ \binom{n-1}{0} - \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} - \binom{n-1}{3} + \dots + (-1)^{n-3}\binom{n-1}{2} + (-1)^{n-2}\binom{n-1}{1} + (-1)^{n-1} \right\} +$$
$$+ n - 1 - 1 + (-1)^{n-1} = n - 2 + (-1)^{n-1},$$

puisque

$$\binom{n-1}{0} - \binom{n-1}{1} + \dots + (-1)^{n-2}\binom{n-1}{1} + (-1)^{n-1} = (1-1)^n = 0\ ;$$

et aussi

$$(n-1)\,! + 2 - (-1)^{n-1} = nP$$

avec P entier.

Pour $n > 2$ premier on a enfin la relation

$$(n-1)\,! + 1 = nP\ .$$

Réciproquement si

$$(n-1)!+1=nP\ ,$$

le nombre n est premier et l'on a aussi démontré le *théorème de Wilson.*

Ce théorème fut attribué à WILSON par WARING, mais on le doit à LAGRANGE.

Messine, 24 décembre 1928.

MOUVEMENT D'UN POINT DONT L'ACCÉLÉRATION EST PARALLÈLE A UNE DROITE OU A UN PLAN CONSTANTS

PAR

Letterio TOSCANO (à Messine).

Dans mon travail *Moto di un punto sollecitato da una forza la cui linea d'azione incontra una retta fissa*, sous presse dans le *Giornale di Matematiche*, nous traitons de manière complète et en appliquant la méthode vectorielle, un problème traité déjà par CERRUTI, DAINELLI, CESARO, GEBBIA, avec méthodes diverses qui conduisent à des calculs compliqués.

M. U. DAINELLI, dans un autre travail, *Sul movimento per una linea qualunque* (*Giornale di Matematiche*, vol. 18, 1880, pp. 271, 300), considère le mouvement d'un point dont l'accélération est parallèle à une droite ou à un plan constants; et ici nous reprenons le même problème pour le traiter par la méthode vectorielle.

1. — Mouvement d'un point dont l'accélération a une direction constante.

Soit P le point mobile et a un vecteur unitaire suivant la direction constante