

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 29 (1930)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE.

Artikel: SUR LE NOMBRE e .
Autor: Greminger, Hanni
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-23266>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 22.12.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR LE NOMBRE e .

PAR

M^{lle} Hanni GREMINGER (Zurich).

Les lignes suivantes ¹ apportent une modification que je crois nouvelle à la démonstration donnée par HERMITE ² pour la transcendance du nombre e . Je reprendrai et je suivrai la démonstration d'Hermite jusqu'au point final, où il s'agit de prouver qu'un certain déterminant est différent de zéro; c'est ce point essentiel que j'établirai d'une manière entièrement différente de celle d'Hermite.

La démonstration d'Hermite se base sur l'approximation *arithmétique* simultanée des nombres

$$e, e^2, e^3, \dots e^n,$$

c'est-à-dire sur l'approximation de ces nombres par des nombres rationnels de même dénominateur. Hermite déduit cette approximation de l'approximation *algébrique* simultanée des fonctions

$$e^x, e^{2x}, e^{3x}, \dots e^{nx},$$

c'est-à-dire de l'approximation de ces fonctions par des fonctions rationnelles de même dénominateur.

1. On obtient l'approximation algébrique en question en partant de la formule

$$x^{M+1} e^{\nu x} \int_0^{\nu} e^{-xz} F(z) dz = e^{\nu x} [F(0)x^M + F'(0)x^{M-1} + \dots + F^{(M)}(0)] \\ - [F(\nu)x^M + F'(\nu)x^{M-1} + \dots + F^{(M)}(\nu)], \quad (1)$$

¹ Extrait d'une conférence faite au séminaire mathématique de l'École polytechnique fédérale, le 17 mai 1930.

² Charles HERMITE: *Sur la fonction exponentielle*, Œuvres (Paris, 1912), t. III, p. 150.

où $F(z)$ désigne un polynôme quelconque de degré M et où nous prendrons plus tard $\nu = 1, 2, 3, \dots n$. On vérifie (1) par une application répétée de l'intégration par parties.

Le degré des polynômes en x au second membre de (1) s'abaisse, si $F(z)$ a des racines multiples aux points $x = 0$ et $x = \nu$. En tenant compte de ce fait, remplaçons $F(z)$ successivement par les $n + 1$ fonctions différentes suivantes:

$$F_0(z), F_1(z), F_2(z), \dots F_n(z),$$

où

$$F_s(z) = \frac{f(z)^\mu}{z - s} \quad (s = 0, 1, 2, \dots n), \quad (2)$$

$$f(z) = z(z - 1)(z - 2) \dots (z - n) \quad (3)$$

et où μ est un entier positif; $F_s(z)$ est alors de degré

$$M = \mu(n + 1) - 1.$$

Avec ce choix de $F(z)$ et en décomposant \int_0^ν en $\int_0^\infty - \int_\nu^\infty$, la formule (1) devient

$$\frac{x^{\mu(n+1)} e^{\nu x}}{(\mu - 1)!} \int_0^\nu e^{-xz} F_s(z) dz = P_{s0}(x) e^{\nu x} - P_{s\nu}(x) \quad (4)$$

où

$$\begin{aligned} P_{s\nu}(x) &= \frac{x^{\mu(n+1)} e^{\nu x}}{(\mu - 1)!} \int_\nu^\infty e^{-xz} F_s(z) dz \\ &= \frac{F_s^{(\mu-1)}(\nu) x^{\mu n} + F_s^{(\mu)}(\nu) x^{\mu n-1} + \dots + F_s^{(\mu(n+1)-1)}(\nu)}{(\mu - 1)!} \quad (5) \\ &(s = 0, 1, 2, \dots n, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots n). \end{aligned}$$

Observons que les coefficients du polynôme $P_{s\nu}(x)$ sont des entiers, parce que multiples de certains coefficients du polynôme $F_s(\nu + x)$.

La fonction rationnelle $P_{s\nu}(x) / P_{s0}(x)$ donne l'approximation algébrique de $e^{\nu x}$ dont il a été question, les séries de Maclaurin de $P_{s\nu}(x) / P_{s0}(x)$ et de $e^{\nu x}$ ayant les mêmes coefficients jusqu'à celui de $x^{\mu(n+1)-1}$ inclusivement.

2. On obtient l'approximation arithmétique de $e, e^2, \dots e^n$ en prenant $x = 1$ dans (4). Cette formule donne pour $x = 1$ et $\nu = 1, 2, 3, \dots n$

$$\begin{aligned} P_{s0} e - P_{s1} &= \varepsilon_{s1} \\ P_{s0} e^2 - P_{s2} &= \varepsilon_{s2} \\ &\dots \dots \dots \\ P_{s0} e^n - P_{sn} &= \varepsilon_{sn} \end{aligned} \tag{6}$$

où nous avons posé

$$P_{s\nu} = P_{s\nu}(1) = \frac{e^\nu}{(\mu - 1)!} \int_\nu^\infty e^{-z} \frac{f(z)^\mu}{z - s} dz, \tag{7}$$

$$\varepsilon_{s\nu} = e^\nu \int_0^\nu e^{-z} \frac{f(z)}{z - s} \frac{f(z)^{\mu-1}}{(\mu - 1)!} dz, \tag{8}$$

$$(s = 0, 1, 2, \dots n, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots n),$$

(7) et (8) découlent de (2) et (5).

Les nombres $P_{s\nu}$ sont des *entiers*. Les nombres $\varepsilon_{s\nu}$ tendent vers zéro pour $\mu \rightarrow \infty$ comme le $(\mu - 1)$ ième terme d'une série exponentielle, voir (8). La fraction rationnelle $P_{s\nu} / P_{s0}$ donne l'approximation arithmétique de e^ν que nous allons utiliser.

3. Pour décider si e est algébrique ou transcendant, il s'agit de voir s'il est possible ou non d'avoir une relation de la forme

$$N_0 + N_1 e + N_2 e^2 + \dots + N_n e^n = 0 \tag{?}$$

où $N_0, N_1, N_2, \dots N_n$ sont des *entiers*, qui ne sont pas tous nuls.

Multiplions les équations (6) par N_1 , respectivement par $N_2, \dots N_n$, et ajoutons-les à l'équation triviale

$$P_{s0} - P_{s0} = 0$$

multipliée par N_0 . En supposant la relation hypothétique (?) nous obtenons

$$P_{s0} N_0 + P_{s1} N_1 + \dots + P_{sn} N_n = -(\varepsilon_{s1} N_1 + \varepsilon_{s2} N_2 + \dots + \varepsilon_{sn} N_n) \tag{9}$$

Le premier membre représente un nombre entier quel que soit l'entier positif μ , qui est entré dans nos calculs par (2) et qui est

resté indéterminé jusqu'ici. Mais si μ tend vers l'infini, le second membre de (9) tend vers zéro; dès que nous sommes assurés que le module de ce second membre est inférieur à 1, nous savons qu'il est, étant entier, exactement égal à 0. Ainsi nous obtenons, pour μ suffisamment grand,

$$P_{s0} N_0 + P_{s1} N_1 + P_{s2} N_2 + \dots + P_{sn} N_n = 0. \quad (10)$$

Nous pouvons prendre $s = 0, 1, 2, \dots, n$ dans (10) et ainsi nous obtenons un système de $n + 1$ équations linéaires et homogènes pour les $n + 1$ entiers N_0, N_1, \dots, N_n , regardés comme inconnues. Si nous savions que le déterminant

$$|P_{sv}| \quad (s, v = 0, 1, \dots, n) \quad (11)$$

de ces équations est différent de 0, les équations (10) ne posséderaient que la solution triviale zéro; une relation de la forme (?) n'aurait lieu que pour $N_0 = N_1 = N_2 = \dots = N_n = 0$. Nous démontrerons que le nombre e est transcendant en montrant que le déterminant (11) est différent de 0.

4. Si le déterminant (11) était égal à 0, on pourrait trouver des constantes réelles $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$, qui ne seraient pas toutes nulles, et qui satisferaient aux $n + 1$ équations qu'on obtient de

$$P_{0v} u_0 + P_{1v} u_1 + P_{2v} u_2 + \dots + P_{nv} u_n = 0 \quad (12)$$

en mettant $v = 0, 1, 2, \dots, n$. Tenant compte de (7), nous pouvons écrire (12), après l'avoir divisé par le facteur $e^v / (\mu - 1)!$

$$\int_v^\infty e^{-z} f(z)^\mu \left[\frac{u_0}{z} + \frac{u_1}{z-1} + \dots + \frac{u_n}{z-n} \right] dz = 0. \quad (13)$$

($v = 0, 1, 2, \dots, n$)

Nous considérons la fonction

$$\Phi(x) = \int_x^\infty e^{-z} f(z)^\mu \left[\frac{u_0}{z} + \frac{u_1}{z-1} + \dots + \frac{u_n}{z-n} \right] dz.$$

En vertu de (13) on a

$$\Phi(0) = \Phi(1) = \Phi(2) = \dots = \Phi(n) = 0$$

et en outre

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) = 0 .$$

Le théorème de Rolle généralisé nous dit qu'il existe entre les $n + 2$ zéros réels de la fonction continue $\Phi(x)$ au moins $n + 1$ zéros de sa dérivée:

$$\Phi'(x) = -e^{-x} f(x)^2 \left[\frac{u_0}{x} + \frac{u_1}{x-1} + \dots + \frac{u_n}{x-n} \right] ,$$

ces zéros de la dérivée étant différents des zéros de $\Phi(x)$: $0, 1, 2, \dots, n, \infty$.

Le facteur $e^{-x} f(x)^2$ ne s'annule qu'aux zéros de $\Phi(x)$; il faut donc que le facteur restant

$$\frac{u_0}{x} + \frac{u_1}{x-1} + \dots + \frac{u_n}{x-n}$$

possède tous ces $n + 1$ zéros intermédiaires. Il s'en suit, puisque le numérateur de cette fonction rationnelle est au plus de degré n , que

$$\frac{u_0}{x} + \frac{u_1}{x-1} + \dots + \frac{u_n}{x-n} \equiv 0 ;$$

et de cela on tire que nécessairement

$$u_0 = u_1 = \dots = u_n = 0 .$$

On a donc

$$|P_{s,v}| \neq 0 ,$$

c'est-à-dire qu'une relation non triviale de la forme (?) est impossible; e est transcendant.

Il me reste encore à dire que cette démonstration, aussi simple qu'elle soit dans le cas où les exposants de e sont des nombres réels, ne conduit plus au but pour des exposants complexes. La méthode par laquelle Hermite a démontré que le déterminant $|P_{s,v}|$ est différent de zéro est, au contraire, indépendante de la réalité des exposants.