

**Paul Appell et Edouard Goursat. — Théorie des Fonctions algébriques, de leurs Intégrales et des Transcendantes qui s'y rattachent. Deuxième édition revue et augmentée par P. Fatou. Tome I. Etude des Fonctions analytiques sur une Surface de Riemann. Tome...**

Autor(en): **Buhl, A.**

Objekttyp: **BookReview**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **29 (1930)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE.**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## BIBLIOGRAPHIE

---

Paul APPELL et Edouard GOURSAT. — **Théorie des Fonctions algébriques, de leurs Intégrales et des Transcendantes qui s'y rattachent.** Deuxième édition revue et augmentée par P. Fatou. Tome I. Etude des Fonctions analytiques sur une Surface de Riemann. Tome II. Fonctions automorphes. — Deux volumes grand in-8° de xxxv-526 pages, 78 figures et xiv-522 pages, 52 figures. Prix, pour l'ensemble: 200 francs. Gauthier-Villars & C<sup>ie</sup>. Paris, 1929-1930.

Triste ironie des destinées. Ce magnifique Ouvrage atteint une seconde édition, non moins magnifiquement développée, à peu près à l'époque où Paul Appell disparaît, cependant qu'une autre mort, tout à fait prématurée, empêche le jeune géomètre, qui a merveilleusement complété le volume primitif, d'assister à un triomphe plus que mérité.

Nous n'avons pas ici à nous livrer à quelque analyse étendue du livre. Ce serait particulièrement inutile pour le tome premier dont la première édition date de 1895. Vers cette époque, nous n'avions guère qu'un chapitre, très difficile, de Camille Jordan et quelques autres, de M. Emile Picard, pour nous initier, de manière didactique, à la géniale conception de surface de Riemann. Un exposé, spécialement consacré au sujet, fut le bienvenu. Charles Hermite écrivit une Préface, d'ailleurs pieusement conservée dans l'édition d'aujourd'hui. L'idée fondamentale était claire. Il fallait se mettre bien en face des propriétés des fonctions *uniformes*, dans un champ complexe ordinaire, et étendre ces propriétés aux fonctions *multiformes*, particulièrement aux fonctions algébriques, considérées comme fonctions d'un *point analytique* sur la surface à feuillets possédant *lignes de passage* et *coupures* lui assurant finalement une certaine *connexion*, un certain *genre*.

Paul Appell et M. Edouard Goursat s'acharnèrent à être ingénieux; on fit de nombreuses figures, des croquis spatiaux, on donna des explications méticuleuses après quoi il était impossible de ne pas *voir* cette nouvelle géométrie si utile à l'analyse. Cette façon de procéder, qui avait sa nécessité en 1895, étant moins nécessaire maintenant, Pierre Fatou a pu diminuer un peu certaines parties purement descriptives pour y loger de nouveaux sujets, si bien que le volume se trouve complété sans allongement. On y trouve, par exemple, le nom de M. Hermann Weyl qui a tant fait pour les Espaces de Riemann. Espaces et surfaces de Riemann sont, à coup sûr, choses différentes et pouvant même répondre à nombre de préoccupations étrangères l'une à l'autre. Ces choses sont cependant sorties d'un même cerveau; on est à la hauteur de l'une quand on est à la hauteur de l'autre. A cause de la Gravifique, les espaces, dans ces dernières années, ont peut-

être brillé plus que les surfaces. Avec le volume dont il s'agit maintenant, attendons-nous à une recrudescence d'éclat pour ces dernières. Elles semblent faites pour qu'on puisse y apercevoir, avec le maximum de simplicité, toute la pensée, tout le génie d'Abel.

Le second volume, ainsi que M. Goursat nous en avertit dans une courte Préface, est entièrement l'œuvre de Pierre Fatou. Il peut jouer, dans la Science, le même rôle que le Tome II des *Œuvres* de Poincaré. C'est l'ouvrage didactique français attendu depuis que l'on parle de fonctions fuchsiennes, celui que beaucoup demandaient à Poincaré lui-même comme nous l'avons rappelé après la mort de l'illustre géomètre (*L'Ens. math.*, T. 15, 1913, p. 16). Analyser ce volume ne peut guère nous conduire qu'à répéter ce que nous avons écrit au sujet de Poincaré et particulièrement du Tome II précité (*Ibid.*, T. 19, 1917, p. 5). Résumons-nous cependant et d'autant plus volontiers qu'on éprouve un plaisir esthétique indéniable à montrer que ces sujets immenses peuvent se ramener à un très petit nombre d'idées, aussi lumineuses que fondamentales, peut-être même à une seule idée. Les fonctions multiformes ont besoin d'être uniformisées, ce pourquoi on peut employer des surfaces de Riemann. Or les fonctions automorphes sont aussi uniformisantes; elles permettent notamment d'exprimer les coordonnées d'un point, appartenant à une courbe algébrique, en fonctions uniformes d'un paramètre. Pour ces fonctions, l'automorphisme se manifeste dans le champ complexe, en une infinité de régions congruentes, de même que la double périodicité se manifeste en une infinité de parallélogrammes. Ces régions congruentes sont limitées par arcs circulaires associés par paires. On peut tenter de déformer l'une d'elles de manière à ce que deux côtés d'une même paire coïncident et, s'il doit en être ainsi pour toutes les paires, la déformation ne va pas sans questions de connexion absolument analogues à celles qui se présentent avec les surfaces de Riemann. Quant à l'automorphisme initial, il provient d'un groupe *linéaire*, du même groupe homographique à une seule variable qui établit une correspondance, de droite à droite, avec conservation des rapports anharmoniques, toutes choses essentielles pour la définition des angles et distances en Géométrie non-euclidienne. Tout cela tient du prodige et même, cette fois, la distinction faite, tout à l'heure, entre surfaces et espaces de Riemann, tend presque à disparaître. La Géométrie non-euclidienne, dont nous venons de parler, est l'étude d'espaces à courbure constante, cas particuliers des espaces de Riemann.

Ces considérations ne vont pas sans correspondances entre plan et sphère, sans fonctions *polyédriques*. La correspondance entre surface de Riemann et polygone fuchsien peut passer de la question d'*analysis situs* à celle d'une parfaite représentation conforme. Ceci ne va pas non plus sans considérations fonctionnelles équivalant à nombre de constructions modernes; là où Poincaré employait les séries thêtafuchsiennes, nous trouvons maintenant, avec MM. Vitali et Montel, les suites de fonctions analytiques. Les théorèmes de M. Picard et leurs généralisations, les correspondances entre points essentiels, ..., possèdent, dans la théorie des fonctions automorphes, comme un mécanisme délicat qu'on ne retrouve pas forcément dans des démonstrations voulant s'affranchir de procédés générateurs qui auront toujours le double mérite d'avoir été les premiers en date et surtout d'avoir été les véritables instruments de découverte.

C'est pourquoi la présente œuvre de Paul Appell et de M. Edouard

Goursat, si bien reprise et poursuivie par Pierre Fatou, est appelée à un grand retentissement d'où de nouveaux et profonds résultats vont certainement jaillir en abondance.

A. BUHL (Toulouse).

Paul APPELL. — **Éléments de la Théorie des Vecteurs et de la Géométrie analytique.** Deuxième édition. — Un volume in-8° de iv-126 pages et 57 figures. Prix: 18 francs. Gauthier-Villars & C<sup>ie</sup>. Paris, 1930.

Après le précédent volume, qui représente les plus hautes considérations de la Théorie des Fonctions, nous n'hésitons pas à placer celui-ci, si élémentaire soit-il, justement parce qu'il est toujours extrêmement remarquable qu'une minime œuvre d'enseignement soit écrite par un savant de tout premier ordre. D'ailleurs ce livre est encore une seconde édition. La première fut publiée dans la Collection Payot, en 1921 et *L'Enseignement mathématique* en a rendu compte alors (T. XXII, 1921-22, p. 85). Il s'agit toujours de la géométrie des vecteurs, des droites, des plans, des coniques, du cercle et de la sphère; on arrive au seuil de l'étude des quadriques. Ce petit programme ne va pas cependant sans quelques traits qui révèlent la personnalité de l'auteur. Tel est le lien entre produits vectoriels intérieur et extérieur, lien qui équivaut à l'identité de Lagrange. Tel est le produit

$$(r + r' - 2a)(r - r' - 2a)(-r + r' - 2a)(-r - r' - 2a)$$

utilisé pour mettre en équation, à la fois, l'ellipse et l'hyperbole rapportées à leurs axes. Il y a nullité du premier facteur sur l'ellipse, du second ou du troisième sur l'hyperbole. N'insistons pas. La réédition du livre est la meilleure preuve de son utilité. Et si Paul Appell n'est plus, on peut dire que son influence restera prépondérante, pendant longtemps, dans les domaines classiques les plus divers.

A. BUHL (Toulouse).

Emile PICARD. — **Leçons sur quelques Problèmes aux limites de la Théorie des Equations différentielles** rédigées par Marcel Brelot (Cahiers scientifiques publiés sous la direction de M. Gaston Julia. Fascicule V). — Un volume grand in-8° de viii-272 pages et 31 figures. Prix: 60 francs. Gauthier-Villars & C<sup>ie</sup>. Paris, 1930.

Qui n'a ressenti quelque chagrin en constatant que M. Emile Picard abandonnait l'idée d'ajouter un quatrième tome à son *Traité d'Analyse*. Heureusement nous voici dédommagés, au moins partiellement, par les *Leçons* qui se succèdent dans les *Cahiers scientifiques*. Celui-ci comprend une Première Partie, consacrée aux Equations différentielles ordinaires et qui développe des points déjà étudiés dans le tome III du *Traité*; une Seconde partie, consacrée aux Equations aux dérivées partielles, nous donne vraisemblablement des choses qui auraient pu se situer dans le tome IV.

Les méthodes générales ici employées constituent une curieuse association de procédés intégraux appliqués, d'abord très directement, à des équations différentielles. L'un des plus simples consiste à multiplier l'équation par un facteur différentiel et à intégrer entre  $a$  et  $b$ ; il n'en faut souvent pas davantage pour juger de l'existence de la courbe intégrale passant par deux