

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 29 (1930)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE.

Buchbesprechung: H. S. Carslaw. — Introduction to the Theory of Fourier's Séries and Intégrais. Third Edition, revised and enlarged. — Un volume in-8° de xiv-368 pages et 39 figures. Prix: Sh. 20. Macmillan and Co., Limited. Londres, 1930.

Autor: Buhl, A.

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 22.12.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Nicolas LUSIN. — **Leçons sur les Ensembles analytiques et leurs applications.** Avec une note de M. Waclaw Sierpinski et une Préface de M. Henri Lebesgue. (Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions publiée sous la direction de M. Emile Borel). — Un volume grand in-8° de XII-328 pages. Prix: 60 francs. Gauthier-Villars & C^{ie}. Paris, 1930.

Ce merveilleux volume semble prouver que la Théorie des Ensembles a fait des progrès immenses qui la lient définitivement avec toutes les disciplines mathématiques. L'esprit philosophique qui se dégage des pages rédigées par M. Lusin est de même nature que celui qui émane de la Théorie des Groupes ou de quelque exposition extrêmement générale de la Géométrie. Dans les trois cas le langage tend à devenir le même. Ainsi les ensembles analytiques dont il s'agit ici sont, dans des domaines à m dimensions, les projections d'ensembles élémentaires situés dans des domaines à $m + 1$ dimensions. Nous ne pouvons définir ici ce qu'il faut entendre exactement par *projection* ou par *ensembles élémentaires*, qui peuvent encore être fort compliqués, mais il s'agit indéniablement d'un grand théorème générateur à caractère intuitif. Il y a des ensembles analytiques *universels* générateurs, *par sections rectilignes*, d'ensembles linéaires. La notion de *mesure* et les classifications fonctionnelles de M. René Baire s'allient à ces considérations avec une simplicité inattendue. Nous ne pouvons pas non plus définir ici la notion de *criblage*; disons seulement qu'il y a des cribles analytiques qui font que tout ensemble criblé devient analytique.

La notion de projection, alliée avec d'autres, telles celle d'ensemble complémentaire, peut conduire à des ensembles inconnus mais *nommables*. On retrouve toutes les discussions célèbres, d'il y a un quart de siècle, auxquelles prirent part MM. Baire, Borel, Hadamard, Lebesgue, mais maintenant avec de nombreux éléments de coordination qui manquaient alors. Et le plus curieux est qu'en se perfectionnant ainsi, la théorie prend une allure non seulement intuitive mais pleine d'un certain idéalisme logique qui paraît être d'une extrême utilité. Point de barrières à l'imagination mais des règles pour imaginer le mieux et le plus possible si, dira-t-on, de telles règles peuvent exister. Eh bien, il semble que M. Lusin en ait trouvé quelques-unes.

Faut-il insister sur la distinction entre le « non contradictoire » et le « réel ». La conception des ensembles *nommables* (p. 24) ne relève-t-elle pas de la psychologie et ne fait-elle pas entrer en ligne de compte les propriétés de nos cerveaux ? La Physique contemporaine ne nous donne-t-elle pas quantité de notions idéales ? N'y a-t-il pas des cas où notre intuition se fait une image claire de choses contenant une contradiction logique ?

Toutes ces questions, amenées ici par les ensembles, apparaissent, dans la Science, sur les terrains les plus divers. C'est pourquoi cette Science appelle de plus en plus, à côté du *nombre*, la considération de l'*ensemble*, surtout tel que le conçoit M. Lusin.

A. BUHL (Toulouse).

H. S. CARSLAW. — **Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals.** Third Edition, revised and enlarged. — Un volume in-8° de XIV-368 pages et 39 figures. Prix: Sh. 20. Macmillan and Co., Limited. Londres, 1930.

La première édition de cet ouvrage est de 1906, la seconde de 1921.

Voici la troisième qui répond suffisamment du succès. Une série de Fourier est un développement

$$a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots$$

dont les coefficients a et b s'expriment par les intégrales définies bien connues portant sur $f(x)$, $f(x) \cos nx$, $f(x) \sin nx$. Alors le développement précédent est dit *correspondre* à $f(x)$. Tout le livre roule sur les conditions qui permettent de passer de cette *correspondance* à une véritable *représentation* de $f(x)$. Il est certain que Fourier ne prenait pas tant de précautions et l'évolution des idées nous est d'abord présentée en une très attachante Introduction historique. Celle-ci comprend une Première période (1750-1850) avec Euler, D. Bernoulli, d'Alembert, Euler, Lagrange, Poisson, Cauchy, Dirichlet. La seconde période (1850-1905) comprend Riemann, Heine, Cantor, P. du Bois-Reymond, Stokes, Fejér, Dini, Lipschitz, Jordan. La troisième (1905-...) réunit Lebesgue, Hobson, Burckhardt, Hardy, Littlewood, de la Vallée Poussin, W.-H. Young, F. Riesz, Fatou, Tonelli, ... Nous avons plaisir à signaler que, surtout en ce qui concerne cette dernière période, l'auteur a utilisé un travail de Michel Plancherel, sur *Le développement de la Théorie des Séries trigonométriques dans le dernier quart de siècle*, publié dans *L'Enseignement mathématique* (T. XXIV, 1924-25, p. 19).

L'ouvrage prend les choses au début avec les notions de nombre et d'ensemble, les diverses transformations du concept de fonction, le théorème de Heine-Borel, ... Vient ensuite l'intégrale définie avec un exposé tout imprégné des idées de M. Lebesgue mais mis en contact, quand cela est possible, avec des intégrations élémentaires, avec de nombreux cas *calculés*. Enfin il faut une théorie générale des séries en $u_n(x)$ et des intégrales définies contenant un paramètre arbitraire, par rapport auquel on se propose d'intégrer ou de différentier, pour pouvoir aborder les séries de Fourier, sur un terrain solide, avec le secours des intégrales de Dirichlet. Ici, nous arrivons à une riche collection de figures que l'on ne se lasse point d'admirer. Il s'agit des séries de Fourier représentant des lignes *discontinues* formées de segments rectilignes. Si l'on ne prend, dans l'une de ces séries que les n premiers termes, représentés par $s_n(x)$ et si l'on trace la courbe $y = s_n(x)$ on a une ligne *continue* qui, quand n croît, épouse, *de plus en plus près*, la forme de la ligne *discontinue* considérée d'abord. Certes, ce n'est pas la première fois que l'on voit des figures de ce genre mais ici elles sont faites avec un soin qui confine à l'art véritable. Ce soin pourrait presque mener à la découverte empirique du fameux Phénomène de Gibbs. Ceci encore n'est pas une nouveauté. L'analyse précédente du tome II du *Cours* de M. Hadamard remet en mémoire le tome I qui (p. 289) contient une description du phénomène en question. Rien de plus curieux. La courbe $y = s_n(x)$ ne tend pas véritablement, quand n croît, vers la ligne discontinue primitive complétée, dans les sauts d'ordonnées, par les segments parallèles à Oy , mais vers une figure en laquelle ces derniers segments sont légèrement prolongés dans les deux sens. Le saut strictement nécessaire est élargi comme pour un élan préliminaire qui, ensuite, ne peut pas non plus être maîtrisé immédiatement.

Les intégrales de Fourier occupent un dernier chapitre. C'est un cas limite que les précautions prises d'abord permettent de traiter brièvement.

Un premier Appendice aborde l'Analyse harmonique. Un second est consacré à l'intégrale de Lebesgue dans ses rapports avec la notion de *mesure*.

L'ouvrage est digne des plus grands éloges. L'un de ses mérites principaux est de reprendre des exposés, parfois bien abstraits dans les écrits des créateurs, pour les présenter sous une forme intuitive souvent appuyée sur le schème géométrique et sur le calcul explicite.

A. BUHL (Toulouse).

E. C. TITCHMARSH. — **The Zeta-Function of Riemann** (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, n° 26). — Un volume in-8° de VIII-104 pages. Prix: 6s. 6d. net. Cambridge University Press. Londres, 1930.

Sujet ardu et qui probablement ne cessera jamais de l'être. La fonction de Riemann $\zeta(s)$ est définie par la série de Dirichlet

$$\zeta(s) = \sum n^{-s} ; \quad s = \sigma + it , \quad \sigma > 1 ,$$

quand n varie par valeurs entières de 1 à l'infini positif. Ceci équivaut à

$$\zeta(s) = \prod (1 - p^{-s})^{-1} ,$$

quand p est la suite des nombres premiers, et permet déjà de pressentir que la recherche des zéros de $\zeta(s)$ équivaut à la recherche de la distribution des nombres premiers. Cette décomposition en facteurs rappelle bien un peu la décomposition des fonctions entières en produits infinis dont les facteurs mettent en évidence les zéros de la fonction mais ici les choses sont incomparablement plus compliquées. D'abord $\zeta(s)$ n'est pas une fonction entière et ses zéros sont des valeurs de s à rechercher non sur le produit précédent mais sur des prolongements analytiques de celui-ci. Néanmoins les premiers travaux d'approche concernant la fonction ζ consistent à la lier à des fonctions entières, notamment à une fonction ξ présentant la propriété fonctionnelle

$$\xi(s) = \xi(1 - s)$$

et qui est bien décomposable en facteurs primaires suivant un procédé étudié jadis par M. Hadamard. Les travaux de M. Valiron se rapportent aussi à de tels points. D'ailleurs $\zeta(s)$ intervient directement dans plusieurs relations fonctionnelles remarquables dont l'une établit une correspondance entre le demi-plan situé à gauche de l'axe imaginaire et le demi-plan situé à droite de la parallèle au dit axe menée par le point 1 qui est un pôle. Entre ces deux régions est la terrible bande critique qui a déjà absorbé tant d'efforts pour l'obtention de résultats qui ne sont pas précisément très étendus. Lindelöf, Hardy, Littlewood, Weyl ont donné d'importantes formules asymptotiques. Les formules intégrales donnant des valeurs moyennes sont également à remarquer et il y a aussi, pour $\zeta(s)$, des relations fonctionnelles approchées.

Pour en revenir à la mystérieuse distribution des zéros, elle a donné lieu à des *hypothèses* selon des modes de raisonnement peu usités en Analyse et qui montrent bien les exceptionnelles difficultés du sujet. On associe à $\zeta(s)$ d'autres fonctions à zéros; si l'on pouvait prouver que ces derniers ont telle ou telle distribution, ceux de $\zeta(s)$ seraient mieux repérés. Après cela, que dire qui semble immédiatement accessible, sur le comportement général de