Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 29 (1930)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE.

Artikel: COURBURE GÉODÉSIQUE. LIGNES GÉODÉSIQUES

Autor: Tzénoff, Iv.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23251

COURBURE GÉODÉSIQUE. LIGNES GÉODÉSIQUES

PAR

Iv. TZÉNOFF (Sofia).

---

1. — Soient

$$x = f(q_1, q_2), \qquad y = \varphi(q_1, q_2), \qquad z = \psi(q_1, q_2)$$

les équations paramétriques d'une surface (S). On définira une courbe (C) de la surface en établissant une relation entre les coordonnées curvilignes q_1 et q_2; ou, ce qui revient au même, en exprimant q_1, q_2 en fonction d'un même paramètre; nous prendrons l'arc s de la courbe pour ce paramètre.

Nous nous proposons de calculer d'une manière nouvelle la courbure géodésique et l'équation des lignes géodésiques.

Dans tout ce qui va suivre nous désignerons par x', y', ... , q_2' les dérivées par rapport à s de x, y, ... , q_2 resp.

Considérons les fonctions

$$U^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = f_1(q_1, q_2, q_1', q_2') = 1,$$

$$V^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2 = f_2(q_1, q_2, q_1', q_2', q_1'', q_2'').$$

On a

$$\left\{\begin{aligned} x' &= \frac{\partial x}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial x}{\partial q_2} q_2', \quad y' = \dots, \quad z' = \dots, \\ x'' &= \frac{\partial x}{\partial q_1} q_1'' + \frac{\partial x}{\partial q_2} q_2'' + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2} q_1'^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_2} q_1' q_2' + \frac{\partial^2 x}{\partial q_2^2} q_2'^2, \quad y'' = \dots, \quad z'' = \dots. \end{aligned}\right. \tag{1}$$

En tenant compte des formules classiques

$$E = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2, \qquad F = \sum\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2}, \qquad G = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2,$$

$$\sum\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q_1}, \qquad \sum\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial^2 x}{\partial q_1\,\partial q_2} = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q_2},$$

$$\sum\frac{\partial x}{\partial q_2}\frac{\partial^2 x}{\partial q_1\,\partial q_2} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial q_1}, \qquad \sum\frac{\partial x}{\partial q_2}\frac{\partial^2 x}{\partial q_2^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial q_2},$$

$$\sum\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial^2 x}{\partial q_2^2} = \frac{\partial F}{\partial q_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial q_1}, \qquad \sum\frac{\partial x}{\partial q_2}\frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2} = \frac{\partial F}{\partial q_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q_2},$$

pour les fonctions considérées on aura

$$U^2 = Eq_1'^2 + 2Fq_1'q_2' + Gq_2'^2 = 1\,, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} V^2 = {} & Eq_1''^2 + 2Fq_1''q_2'' + Gq_2''^2 \\ & + 2q_1''\left[E'q_1' + F'q_2' - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial E}{\partial q_1}q_1'^2 + 2\frac{\partial F}{\partial q_1}q_1'q_2' + \frac{\partial G}{\partial q_1}q_2'^2\right)\right] \\ & + 2q_2''\left[F'q_1' + G'q_2' - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial E}{\partial q_2}q_1'^2 + 2\frac{\partial F}{\partial q_2}q_1'q_2' + \frac{\partial G}{\partial q_2}q_2'^2\right)\right] + \dots \end{aligned} \tag{3}$$

Considérons un vecteur $\vec{U}$ de grandeur *un* dirigé suivant la tangente de la courbe (C) et un autre vecteur $\vec{V}$ de grandeur $\frac{1}{\rho}$, dirigé suivant la normale principale de (C). Le produit scalaire du vecteur $\vec{V}$ et du vecteur $\overrightarrow{\delta s}(\delta x, \delta y, \delta z)$ [représentant le déplacement infinitésimal du point M (x, y, z) obtenu en donnant aux q_1, q_2 des variations infiniment petites δq_1, δq_2] est donné par la relation

$$\begin{aligned} V\delta s \cos(V, \delta s) &= x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z \\ &= \left(x''\frac{\partial x}{\partial q_1} + y''\frac{\partial y}{\partial q_1} + z''\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)\delta q_1 + \left(x''\frac{\partial x}{\partial q_2} + y''\frac{\partial y}{\partial q_2} + z''\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)\delta q_2\,, \end{aligned}$$

ou, en vertu des équations (1),

$$\begin{aligned} V\delta s \cos(V, \delta s) = {} & \left(x''\frac{\partial x''}{\partial q_1''} + y''\frac{\partial y''}{\partial q_1''} + z''\frac{\partial z''}{\partial q_1''}\right)\delta q_1 \\ & + \left(x''\frac{\partial x''}{\partial q_2''} + y''\frac{\partial y''}{\partial q_2''} + z''\frac{\partial z''}{\partial q_2''}\right)\delta q_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V^2}{\partial q_1''}\delta q_1 + \frac{\partial V^2}{\partial q_2''}\delta q_2\right)\,; \end{aligned} \tag{4}$$

V^2 doit être remplacé par sa valeur (3).

Désignons par θ l'angle que fait la normale principale de la courbe (C) avec la normale de la surface (S) et appliquons la formule générale (4) au déplacement δs, perpendiculaire au vecteur $\vec{U}$. On aura

$$\frac{\sin\theta}{\rho}\delta s = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V^2}{\partial q_1''}\delta q_1 + \frac{\partial V^2}{\partial q_2''}\delta q_2\right)$$

et la courbure géodésique est donnée par la formule

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{\sin\theta}{\rho} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V^2}{\partial q_1''}\frac{\delta q_1}{\delta s} + \frac{\partial V^2}{\partial q_2''}\frac{\delta q_2}{\delta s}\right). \tag{5}$$

Des équations

$$E\left(\frac{\delta q_1}{\delta s}\right)^2 + 2F\frac{\delta q_1}{\delta s}\frac{\delta q_2}{\delta s} + G\left(\frac{\delta q_2}{\delta s}\right)^2 = 1$$

et

$$Eq_1'\delta q_1 + F(q_1'\delta q_2 + q_2'\delta q_1) + Gq_2'\delta q_2 = 0 .$$

[qui expriment que le déplacement δs est effectué sur la surface et qu'il est perpendiculaire au vecteur $\vec{U}(x', y', z')$], on tire facilement

$$\frac{\delta q_1}{\delta s} = -\frac{Fq_1' + Gq_2'}{\sqrt{EG - F^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{EG - F^2}}\frac{\partial U^2}{\partial q_2'},$$

$$\frac{\delta q_2}{\delta s} = \frac{Eq_1' + Fq_2'}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{1}{2\sqrt{EG - F^2}}\frac{\partial U^2}{\partial q_1'}.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{1}{4\sqrt{EG - F^2}}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial U^2}{\partial q_1'} & \dfrac{\partial V^2}{\partial q_1''} \\ \dfrac{\partial U^2}{\partial q_2'} & \dfrac{\partial V^2}{\partial q_2''} \end{vmatrix}. \tag{6}$$

2. — Pour obtenir les lignes géodésiques de la surface, il faut exprimer que la courbure géodésique est nulle, ce qui donne l'équation

$$\frac{\partial V^2}{\partial q_1''}\frac{\partial U^2}{\partial q_2'} - \frac{\partial V^2}{\partial q_2''}\frac{\partial U^2}{\partial q_1'} = 0 . \tag{7}$$

Les deux quantités $\frac{\partial V^2}{\partial q''_1}$, $\frac{\partial V^2}{\partial q''_2}$ sont liées par l'identité

$$\frac{\partial V^2}{\partial q''_1} q'_1 + \frac{\partial V^2}{\partial q''_2} q'_2 = 0 \ . \tag{8}$$

[On peut établir cette identité de la manière suivante. On a

$$\frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial q''_1} = x''\frac{\partial x''}{\partial q''_1} + y''\frac{\partial y''}{\partial q''_1} + z''\frac{\partial z''}{\partial q''_1} = x''\frac{\partial x}{\partial q_1} + y''\frac{\partial y}{\partial q_1} + z''\frac{\partial z}{\partial q_1} \ ,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial q''_2} = x''\frac{\partial x''}{\partial q''_2} + y''\frac{\partial y''}{\partial q''_2} + z''\frac{\partial z''}{\partial q''_2} = x''\frac{\partial x}{\partial q_2} + y''\frac{\partial y}{\partial q_2} + z''\frac{\partial z}{\partial q_2} \ .$$

Multiplions par q'_1, q'_2 les deux équations et ajoutons-les. On aura

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V^2}{\partial q''_1} q'_1 + \frac{\partial V^2}{\partial q''_2} q'_2\right) = x''\left(\frac{\partial x}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} q'_2\right)$$

$$+ \ldots = x''x' + y''y' + z''z' = \frac{1}{2}\frac{dU^2}{ds} = 0 \Big] \ .$$

Des relations (7) et (8) on tire

$$\frac{\partial V^2}{\partial q''_1} = 0 \ , \qquad \frac{\partial V^2}{\partial q''_2} = 0 \ .[1] \tag{9}$$

ou bien, en tenant compte de (3),

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d}{ds}(\mathrm{E}q'_1 + \mathrm{F}q'_2) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial q_1} q'^2_1 + 2\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial q_1} q'_1 q'_2 + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial q_1} q'^2_2\right) &= 0 \ , \\ \frac{d}{ds}(\mathrm{F}q'_1 + \mathrm{G}q'_2) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial q_2} q'^2_1 + 2\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial q_2} q'_1 q'_2 + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial q_2} q'^2_2\right) &= 0 \ . \end{aligned}\right. \tag{9'}$$

Ce sont les équations différentielles des lignes géodésiques. Ces deux équations rentrent d'ailleurs l'une dans l'autre moyennant la relation

$$U^2 = \mathrm{E}q'^2_1 + 2\mathrm{F}q'_1 q'_2 + \mathrm{G}q'^2_2 = 1 \ ,$$

[1] On sait que les lignes géodésiques d'une surface sont les trajectoires d'un point matériel qui n'est sollicité par aucune force. Les équations du mouvement sous la forme donnée par M. P. Appell [*Mécan. rat.*, t. II, § 465, IVe éd.] coïncident avec les équations (9).

qui permet d'éliminer ds de l'une ou de l'autre, par exemple de $\frac{\partial V^2}{\partial q_1''} = 0$. L'équation obtenue est une équation différentielle du second ordre entre q_1 et q_2. Son intégration conduit à la relation $q_2 = f(q_1)$ qui définit les lignes géodésiques de la surface (S).

Nous avons donc montré que la recherche des lignes géodésiques se ramène au problème d'Analyse suivant: trouver le minimum de la courbure $V = \frac{1}{\rho}$, considérée comme fonction explicite de deux variables indépendantes q_1'', q_2'' (les dérivées secondes par rapport à l'arc s des deux coordonnées curvilignes q_1, q_2).

3. — Nous allons faire une application de la méthode précédente à la recherche des lignes géodésiques des surfaces de révolution:

$$x = r\cos\theta\ , \qquad y = r\sin\theta\ , \qquad z = \varphi(r)\ .$$

On trouve

$$\begin{aligned} V^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2 &= r''^2(1 + \varphi'^2) \\ &+ \theta''^2 r^2 - 2r''(\theta'^2 r - \varphi'\varphi'' r'^2) + 4rr'\theta'\theta'' + \dots\ . \end{aligned}$$

Alors les équations des lignes géodésiques sont:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial \theta''} = \theta''.r^2 + 2\theta' rr'\ ; \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{d}{ds}(r^2\theta') = 0\ ,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial r''} = r''(1 + \varphi'^2) - \theta'^2 . r + \varphi'\varphi'' r'^2 = 0\ ,$$

auxquelles il faut joindre l'équation

$$U^2 = 1 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2(1 + \varphi'^2) + r^2\theta'^2\ .$$

En éliminant ds des équations

$$r^2\frac{d\theta}{ds} = C\ ,$$

$$(1 + \varphi'^2)\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = 1\ .$$

on obtient l'équation différentielle de la projection des lignes géodésiques sur le plan Oxy

$$d\theta = \pm\frac{dr}{r}\sqrt{\frac{1 + \varphi'^2}{\frac{r^2}{c^2} - 1}}\ .$$

4. — Nous écrirons de même l'équation différentielle des lignes géodésiques en coordonnées rectangulaires. Soit

$$z = f(x, y)$$

l'équation de la surface (S). On a (avec les notations classiques)

$$z' = px' + qy' , \qquad z'' = px'' + qy'' + rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2 .$$

Par conséquent

$$U^2 = (1 + p^2)x'^2 + 2pqx'y' + (1 + q^2)y'^2 ,$$

$$V^2 = (1 + p^2)x''^2 + 2pqx''y'' + (1 + q^2)y''^2$$
$$+ 2x''p(rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2) + 2y''q(rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2) + \ldots$$

Les équations différentielles des lignes géodésiques sont

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial x''} &= (1 + p^2)x'' + pqy'' + p(rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2) = 0 , \\ \frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial y''} &= (1 + q^2)y'' + pqx'' + q(rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2) = 0 . \end{aligned} \right. \tag{10}$$

Il suffit d'éliminer ds des équations (10). En posant pour abréger

$$rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2 = m ,$$

on tire des équations (10)

$$x'' = -\frac{mp}{1 + p^2 + q^2} , \qquad y'' = -\frac{mq}{1 + p^2 + q^2} .$$

En portant ces valeurs dans l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3} ,$$

on obtient finalement

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(q - p\frac{dy}{dx}\right)\frac{r + 2s\dfrac{dy}{dx} + t\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{1 + p^2 + q^2} .$$
