Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 29 (1930)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE.

Artikel: MOUVEMENT NORMAL
Autor: Toscano, Letterio
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23256

MOUVEMENT NORMAL

PAR

Letterio Toscano (à Messine).

Dans cette note, nous nous proposons de traiter un problème de géométrie cinématique.

Nous appelons mouvement normal celui-là dont la droite qui porte l'accélération du point mobile est perpendiculaire au rayon vecteur par rapport à un point 0.

Soit le point 0 l'origine d'un trièdre $Oxyz$ et, suivant la méthode vectorielle, l'équation caractéristique du mouvement normal du point P est

$$\frac{d^2 \mathrm{P}}{dt^2} \times (\mathrm{P} - \mathrm{O}) = 0 \tag{1}$$

On a identiquement

$$\frac{d^2(\mathrm{P} - \mathrm{O})^2}{dt^2} = 2\frac{d}{dt}\left[\frac{d\mathrm{P}}{dt} \times (\mathrm{P} - \mathrm{O})\right] = 2\frac{d^2 \mathrm{P}}{dt^2} \times (\mathrm{P} - \mathrm{O}) + 2\left(\frac{d\mathrm{P}}{dt}\right)^2 ;$$

et pour un mouvement normal

$$2\left(\frac{d\mathrm{P}}{dt}\right)^2 = \frac{d^2(\mathrm{P} - \mathrm{O})^2}{dt^2} .$$

Si r est la grandeur du vecteur P — 0 et V la grandeur de la vitesse du point P, la dernière relation peut s'écrire

$$2\mathrm{V}^2 = \frac{d^2 r^2}{dt^2} ,$$

ou

$$\mathrm{V}^2 = \frac{d}{dt}\left(r\frac{dr}{dt}\right) = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r\frac{d^2 r}{dt^2} . \tag{2}$$

A cette conclusion, on peut parvenir en appliquant les composantes de la vitesse et de l'accélération suivant le rayon vecteur, la tangente au méridien et la tangente au parallèle qui passent par le point mobile P, par référence aux coordonnées sphériques.

On a les formules

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \qquad v_\varphi = r\frac{d\theta}{dt}, \qquad v_\theta = r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}$$

$$W_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - r\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

$$W_\varphi = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) - r\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

$$W_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(r^2\sin^2\theta\frac{d\varphi}{dt}\right).$$

Dans notre problème on doit avoir $W_r = 0$ et par là

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2. \tag{3}$$

La vitesse est alors donnée par la

$$V^2 = v_r^2 + v_\varphi^2 + v_\theta^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r\frac{d^2 r}{dt^2}.$$

On peut encore écrire (3) sous la forme

$$r\frac{dv_r}{dt} = (v_\varphi)^2 + (v_\theta)^2.$$

Pour un mouvement plan quelconque, on a

$$V^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2;$$

si le mouvement est normal on aura

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

et enfin

$$V^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r\frac{d^2 r}{dt^2}.$$

On trouve ainsi la proposition:

Dans un mouvement normal la vitesse a la même expression pour un mouvement de l'espace aussi bien que pour un mouvement plan.

Nous considérerons ensuite les mouvements plans. L'accélération est donnée par (coordonnées polaires)

$$W = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} .$$

Mais

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d^2r}{d\theta^2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{dr}{d\theta}\frac{d^2\theta}{dt^2} = r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

et de là

$$\frac{dr}{d\theta}\frac{d^2\theta}{dt^2} = \left(r - \frac{d^2r}{d\theta^2}\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 .$$

L'expression de W donne

$$W = \left[2\frac{dr}{d\theta} + \frac{r - \dfrac{d^2r}{d\theta^2}}{\dfrac{d\log r}{d\theta}}\right]\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

et cette dernière expression donne l'accélération dans un mouvement normal plan.

Pour la vitesse, on a encore

$$V^2 = \left[\frac{1}{r}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r\right]r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \left[\frac{1}{r}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r\right]\frac{d^2r}{dt^2} =$$

$$= r\left[\left(\frac{d\log r}{d\theta}\right)^2 + 1\right]\frac{d^2r}{dt^2} .$$

Examinons *quelques applications:*

1. La trajectoire est une spirale logarithmique $\rho = \rho_0 e^{-b\theta}$.

On a

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -b\rho , \quad \frac{d^2\rho}{d\theta^2} = b^2\rho , \quad \frac{d\log\rho}{d\theta} = -b ,$$

et alors

$$W = \left[-2b\rho + \rho\frac{1-b^2}{-b}\right]\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 ,$$

$$W = -\rho\frac{1+b^2}{b}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 .$$

Par là si la trajectoire relative au mouvement normal d'un point est une spirale logarithmique, l'accélération a l'expression analogue au cas dans lequel un point parcourt une spirale logarithmique avec vitesse angulaire constante par rapport au pôle.

En effet, dans ce cas on a

$$W = \omega^2(h^2 + 1)\rho$$

avec $\omega = \dfrac{d\theta}{dt} = \text{cost.}$

2. La trajectoire est une spirale hyperbolique $\rho\theta = k$.

On a

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{1}{k}\rho^2 , \qquad \frac{d^2\rho}{d\theta^2} = \frac{2}{k^2}\rho^3 , \qquad \frac{d\log\rho}{d\theta} = -\frac{1}{k}\rho ,$$

et alors

$$W = -k\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 .$$

Aussi: Si un point parcourt une spirale hyperbolique avec mouvement normal par rapport au pôle, l'accélération est indépendante du rayon vecteur et elle est directement proportionnelle au carré de la vitesse angulaire.

3. La trajectoire est une spirale d'Archimède $\rho = \theta$.

On a

$$\frac{d\rho}{d\theta} = 1 , \qquad \frac{d^2\rho}{d\theta^2} = 0 , \qquad \frac{d\log\rho}{d\theta} = \frac{1}{\rho} ,$$

et alors

$$W = (2 + \rho^2)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 .$$

4. La trajectoire est la courbe $\rho = \operatorname{tg}\theta$.

On a

$$\frac{d\rho}{d\theta} = 1 + \rho^2 , \qquad \frac{d^2\rho}{d\theta^2} = 2\rho(1 + \rho^2) , \qquad \frac{d\log\rho}{d\theta} = \frac{1}{\rho}(1 + \rho^2) ,$$

et alors

$$W = \left[2 + \frac{\rho^2}{1 + \rho^2}\right]\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 .$$

5. La trajectoire est la courbe $\rho = \frac{1}{\cos\theta}$.

On a

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \rho \operatorname{tg}\theta \ , \qquad \frac{d^2\rho}{d\theta^2} = \rho \operatorname{tg}^2\theta + \rho^3 \ , \qquad \frac{d\log\rho}{d\theta} = \operatorname{tg}\theta \ .$$

L'accélération est nulle et l'on a aussi un exemple de mouvement plan normal avec accélération nulle.

Considérons ici le problème inverse et déterminons tous les mouvements normaux et plans dont les accélérations sont de la forme

$$W = k\rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 .$$

Le problème dépend de l'équation différentielle

$$2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2 = \rho\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + k\rho\frac{d\rho}{d\theta} \ .$$

En divisant par ρ^2 et introduisant les logarithmes on passe à

$$2\left(\frac{d\log\rho}{d\theta}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\rho}\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \frac{d\log\rho}{d\theta} \ .$$

En outre

$$\frac{1}{\rho}\frac{d^2\rho}{d\theta^2} = \frac{d^2\log\rho}{d\theta^2} + \left(\frac{d\log\rho}{d\theta}\right)^2$$

et de là

$$\frac{d^2\log\rho}{d\theta^2} = \left(\frac{d\log\rho}{d\theta}\right)^2 - \frac{d\log\rho}{d\theta} + 1 \ .$$

En posant $\log\rho = s$ et $\frac{ds}{d\theta} = u$, il suit

$$\frac{du}{u^2 - u + 1} = d\theta$$

et par intégration

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,cotg} \frac{2u - 1}{\sqrt{3}} = \theta + \theta_0$$

$$u = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{3}}{2}(\theta + \theta_0) \ .$$

De plus haut, on a

$$\rho = e^{\frac{1}{2}\theta - \log\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(\theta+\theta_0)+c} \;;$$

posons $e^c = \rho_0$ et enfin on trouve

$$\rho = \rho_0\, e^{\frac{1}{2}\theta - \log\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(\theta+\theta_0)}$$

qui donne une spirale logarithmique.

ÉTUDE D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE:

$$\frac{dy}{dx} = a(1 + \mathrm{tg}^2 y) + \mathrm{tg}\, y\ \mathrm{th}\, x \qquad \text{(F)}$$

PAR

H. Milloux (Strasbourg).

Cette équation différentielle est extraite du problème de Calcul différentiel et Intégral donné, en 1928, au Concours de l'Agrégation des Sciences Mathématiques.

M. Gambier a publié, dans l'*Enseignement Mathématique*, une solution complète du problème. Il m'a semblé intéressant de reprendre à part, et d'une façon en général indépendante du problème, l'étude de l'équation (F): recherche de tous les types de courbes intégrales, propriétés aux environs des asymptotes $\left(a \leq \frac{1}{2}\right)$ ou des courbes périodiques asymptotes $\left(a > \frac{1}{2}\right)$, variations, en fonction de a, lorsque a ne surpasse pas $\frac{1}{2}$, de certaines courbes intégrales spéciales.

1. — Traitons d'abord brièvement le cas: $a = 0$. L'équation (F) s'intègre immédiatement et donne:

$$\sin y = \frac{\sin y_0}{\mathrm{ch}\, x_0}\, \mathrm{ch}\, x \; .$$

Nous n'insisterons pas sur ce cas simple.