Troisième cas: $a<\frac{1}{2}$.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **29 (1930)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE.**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

La courbe-limite à gauche coupe l'axe Oy en un point d'ordonnée comprise entre O et $-\pi$, et la droite d'ordonnée $-\frac{3\pi}{2}$ en un point d'abscisse inférieure à -1. Elle est donc asymptote à la droite d'ordonnée $-\frac{7\pi}{4}$, par rapport à laquelle elle est de premier type. La courbe symétrique par rapport au point de coordonnées O, $-\pi$, de la courbe intégrale précédente, est une courbe du groupe. Elle est de deuxième type par rapport à la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{4}$ et de premier type par rapport à la droite d'ordonnée $-\frac{7\pi}{4}$. Toute courbe intégrale intermédiaire entre ces deux courbes intégrales possède mêmes asymptotes, par rapport auxquelles elles sont de premier type.

Enfin les autres courbes intégrales du groupe sont asymptotes aux droites d'ordonnées $-\frac{\pi}{4}$ et $-11\frac{\pi}{4}$, par rapport auxquelles elles sont de premier type [1].

Troisième cas : $a < \frac{1}{2}$.

22. — On peut classer *a priori* en plusieurs catégories les portions des courbes intégrales situées dans la bande définie au n° 2. En allant du haut vers le bas, les courbes intégrales qui peuvent se présenter sont les suivantes:

Première catégorie. — Courbes coupant la droite d'ordonnée $+\frac{\pi}{2}$. Toute courbe coupant la droite d'ordonnée y_0'' (définie au n° 5; voir la figure de ce numéro) est de première catégorie.

Deuxième catégorie. — Courbes situées au-dessus de (C) et au-dessous de la droite d'ordonnée y_0'', à laquelle elles sont asymptotes. Nous verrons qu'il en existe une et une seule.

Troisième catégorie. — Courbes coupant la courbe (C). A partir du point d'intersection avec (C), le coefficient angulaire d'une courbe de troisième catégorie est négatif, et la courbe intégrale reste à l'intérieur de (C) qu'elle ne peut couper à nouveau, en raison de la valeur du coefficient angulaire. La courbe intégrale possède donc une asymptote parallèle à Ox, et *cette asymptote est la droite d'ordonnée* y_0'. En effet, si c'était une droite d'ordonnée $y_0' + \varepsilon$, ε étant une quantité positive

[1] Les courbes (γ) et (δ) (se reporter pour la définition à la note du n° 9) admettent des directions asymptotiques. Mais, en général, les asymptotes sont rejetées à l'infini. Il y a exception lorsque la courbe intégrale de (F) correspondante est du deuxième type par rapport à l'une de ses asymptotes. Les courbes (γ) et (δ) correspondantes possèdent alors chacune une asymptote (coefficient angulaire ± 1).

fixe, le coefficient angulaire $\frac{dy}{dx}$ serait aussi voisin que l'on voudrait, pour x assez grand, de la quantité *négative:*

$$a[1 + \operatorname{tg}^2 (y'_0 + \varepsilon)] + \operatorname{tg} (y'_0 + \varepsilon)$$

qui est de l'ordre de grandeur de $\left(a - \frac{1}{2}\right)\varepsilon$, d'où la contradiction.

Toute courbe coupant la droite d'ordonnée y'_0 est évidemment de troisième catégorie.

Quatrième catégorie. — Courbes ne coupant pas la droite d'ordonnée y'_0. Le coefficient angulaire étant positif, ces courbes admettent une asymptote parallèle à Ox, et *cette asymptote est la droite d'ordonnée* y'_0, comme on le voit en appliquant la remarque faite pour les courbes de troisième catégorie.

Les courbes de quatrième catégorie n'existent que si a est compris entre $\frac{\sqrt{3}}{4}$ et $\frac{1}{2}$.

Remarque de comparaison avec le cas $a = \frac{1}{2}$. — La courbe issue du point S $\left(\text{point défini dans le cas } a = \frac{1}{2}\right)$ se trouve nécessairement au-dessous de la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{4}$, puisque, d'après la remarque du n° 6, elle est située au-dessous de la courbe du deuxième type $\left(\text{cas } a = \frac{1}{2}\right)$. Donc c'est une courbe de troisième ou de quatrième catégorie.

Passons à l'étude des courbes de chacune des catégories.

23. — *Courbes de première catégorie.* — Ces courbes s'étudient comme les courbes du troisième type $\left(a = \frac{1}{2}\right)$. La différence des abscisses $x\left(+\frac{\pi}{2}\right) - x(0)$ est comprise entre:

$$\frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 y \, dy = \frac{\pi}{4a}$$

et:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 y \, dy}{a + \sin y \cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - 4a^2}} \operatorname{Log} \frac{1 + \sqrt{1 - 4a^2}}{2a}$$

et tend vers cette dernière quantité lorsque $x(0)$ tend vers $+\infty$.

On a des inégalités analogues lorsque $x(0)$ est négatif, pour la portion de la courbe située à droite de l'axe Oy.

24. — *Courbe de deuxième catégorie. — Il en existe au moins une.* — Le raisonnement qui aboutit à cette conclusion est analogue à celui que nous avons fait au nº 16, pour démontrer l'existence d'une courbe de deuxième type $\left(a = \frac{1}{2}\right)$: au-dessous d'une courbe de première catégorie, il existe des courbes de première catégorie; au-dessus d'une courbe de troisième catégorie il existe des courbes de troisième catégorie. On achève comme plus haut.

Il n'existe qu'une seule courbe de deuxième catégorie. — Soient en effet y et Y les ordonnées ($Y > y$) de deux courbes, correspondant à la valeur x de l'abscisse. On a:

$$\frac{d(Y - y)}{dx} = (\operatorname{tg} Y - \operatorname{tg} y)[a(\operatorname{tg} Y + \operatorname{tg} y) + \operatorname{th} x] .$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, la quantité entre crochets tend vers $2a \operatorname{tg} y_0'' + 1 = \sqrt{1 - 4a^2}$; par conséquent lorsque x dépasse une certaine valeur x_0, $\frac{d(Y - y)}{dx}$ est positif et $Y - y$ reste constamment supérieur à la quantité positive: $Y(x_0) - y(x_0)$, ce qui conduit à la contradiction.

25. — La courbe de deuxième catégorie (prolongée s'il le faut à gauche de l'axe Oy) coupe la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{2}$ en un point T. Donnons quelques indications sur la position de ce point.

La remarque du nº 6 permet de constater que *l'abscisse de* T *est une fonction croissante de* a (y_0'' croît lorsque a décroît) et que *le point* T *se trouve à gauche de* S (ce dernier résultat est une conséquence évidente de ce qui a été dit à la fin du nº 22).

Nous allons montrer que *le point* T *s'éloigne indéfiniment vers la gauche lorsque* a *tend vers* 0, *et se rapproche indéfiniment du point* S *lorsque* a *tend vers* $\frac{1}{2}$.

Etude dans le cas ou a *tend vers* 0. — Le coefficient angulaire de toute courbe intégrale est inférieur à $2a$ dans la bande:

$$x \geqq 0 \qquad -\frac{\pi}{4} < y < 0 .$$

Soit P le point, d'abscisse nulle, qui est situé sur la tangente à (C) ayant pour coefficient angulaire $2a$. Un calcul simple établit que si a ne surpasse pas 0,2, l'ordonnée de P est supérieure à $-\frac{\pi}{4}$, et comprise entre — a et — $4a$. Dans ce cas, la courbe intégrale issue de P est nécessairement située sous la tangente à (C), et par suite c'est une courbe de troisième catégorie. Sur la partie de cette courbe située entre P et la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{2}$, le coefficient angulaire est inférieur à

$$a(1 + \mathrm{tg}^2 y) - \mathrm{tg}\, y$$

et l'on a:

$$x\left(-\frac{\pi}{2}\right) < \int_{-4a}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{a(1 + \mathrm{tg}^2 y) - \mathrm{tg}\, y} < -\frac{1}{2}\int_{+4a}^{+\frac{\pi}{3}} \frac{du}{\mathrm{tg}\, u} < -\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,\frac{0{,}2}{a}\,.$$

Cette inégalité fournit une limite supérieure de l'abscisse de T. On obtient une limite inférieure en remarquant que la courbe issue du point Q d'abscisse — 1 et d'ordonnée — a est de première catégorie, et que sur la partie comprise entre Q et la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{2}$ le coefficient angulaire $\frac{dy}{dx}$ est inférieur à $-\frac{3}{4}$ tg y, d'où l'inégalité :

$$x\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 1 > -\int_{-a}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{4\,dy}{3\,\mathrm{tg}\, y} = -\frac{4}{3}\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{\sin a}$$

et *a fortiori:*

$$x\left(-\frac{\pi}{2}\right) > -1{,}01 - \frac{4}{3}\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{a}\,.$$

En résumé *l'abscisse de T est comprise entre* $-1{,}01 - \frac{4}{3}\mathrm{Log}\,\frac{1}{a}$ *et* $-\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,\frac{0{,}2}{a}$, *lorsque* a *est inférieur à* 0,2. Cette abscisse est négative et tend vers $-\infty$ lorsque a tend vers 0.

Etude dans le cas ou a *tend vers* $\frac{1}{2}$. — La courbe intégrale de (F) issue de l'origine coupe la droite d'ordonnée $+\frac{\pi}{2}$ en un point d'abscisse inférieure à $\frac{\pi}{4a}$, et par suite la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{2}$ en un point d'abscisse supérieure à $-\frac{\pi}{4a}$, ce qui montre que l'abscisse de T est bornée inférieurement par $-\frac{\pi}{4a}$ lorsque a tend vers $\frac{1}{2}$.

Soit S′ un point de la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{2}$, situé dans le voisinage de S, et à gauche de ce point. Par S′ passe une courbe (c) du troisième type $\left(a = \frac{1}{2}\right)$ qui coupe la droite d'ordonnée $+\frac{\pi}{2}$ en un point M. Par M passe une courbe de première catégorie $\left(a < \frac{1}{2}\right)$ que nous désignerons par $c\,(a)$. Nous allons voir que *la courbe* c (a) *se rapproche indéfiniment de la courbe* (c), *lorsque* a *tend vers* $\frac{1}{2}$, y étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

Désignons par x et t les abscisses respectives des points de (c) et de $c\,(a)$ ayant même ordonnée y. Il résulte de la remarque du nº 6 que la différence $x - t$ est positive. Sur la courbe fixe (c), le coefficient angulaire est supérieur à une constante positive que nous désignerons par ε. Cette constante dépend, bien entendu, de la position du point S'.

Des deux équations différentielles relatives à $\frac{1}{2}$ et a, on tire:

$$\frac{d\,(t-x)}{dt} = \frac{(1-2a) + 2\sin y\,\cos y\,(\operatorname{th} x - \operatorname{th} t)}{1 + 2\sin y\,\cos y\,\operatorname{th} x}$$

d'où, *a fortiori* l'inégalité:

$$\varepsilon\frac{d\,(t-x)}{dt} < \left(\frac{1}{2} - a\right) + (x - t)\ .$$

qui établit que la différence $x - t$ est constamment inférieure à la solution u de l'équation différentielle:

$$-\,\varepsilon\frac{du}{dt} = \left(\frac{1}{2} - a\right) + u$$

qui s'annule pour $t = x\,(\mathrm{M})$, solution qui a pour expression:

$$u = \left(\frac{1}{2} - a\right)\left[e^{\frac{x(\mathrm{M})-t}{\varepsilon}} - 1\right].$$

D'après la remarque faite au début de cette étude, t est borné inférieurement; $x(\mathrm{M})$ et ε sont fixes. Donc lorsque a tend vers $\frac{1}{2}$, la différence $x - t$ tend vers zéro.

Le point S' était fixe. Faisons-le tendre vers S. A chaque position de S' correspond une valeur de a telle qu'il existe une courbe de première catégorie coupant la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{2}$ en un point situé aussi près que l'on veut de S'; et par suite ce point tend vers S. *Le point* T, étant situé entre ce point et le point S, *tend vers* S *lorsque* a *tend vers* $\frac{1}{2}$.

26. — *Propriétés asymptotiques de la courbe de deuxième catégorie.* — L'équation (F) peut se mettre sous la forme:

$$\frac{dy}{dx} = [a(1 + \mathrm{tg}^2 y) + \mathrm{tg}\, y] - \mathrm{tg}\, y(1 - \mathrm{th}\, x) \; . \qquad (F')$$

La quantité $a(1 + \mathrm{tg}^2 y) + \mathrm{tg}\, y$ est de l'ordre de grandeur de $y - y_0''$. D'une façon plus précise le rapport $\dfrac{a(1 + \mathrm{tg}^2 y) + \mathrm{tg}\, y}{y - y_0''}$ tend vers la quantité:

$$\alpha = \frac{2\sqrt{1 - 4a^2}}{1 + \sqrt{1 - 4a^2}}$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

De même $-\mathrm{tg}\, y(1 - \mathrm{th}\, x)$ est de l'ordre de grandeur de e^{-2x}; le rapport $\dfrac{-\mathrm{tg}\, y(1 - \mathrm{th}\, x)}{e^{-2x}}$ tend vers la quantité:

$$\beta = \frac{4a}{1 + \sqrt{1 - 4a^2}} \; .$$

Lorsque x est suffisamment grand, le coefficient angulaire de la courbe de deuxième catégorie est inférieur à $\beta(1 + \varepsilon)e^{-2x}$, ε étant une constante positive arbitrairement petite. On en déduit que la fonction $y + \dfrac{\beta(1 + \varepsilon)}{2} e^{-2x}$ est décroissante, et par suite supérieure à sa valeur limite y_0''. D'où l'inégalité:

$$y_0'' - y < \frac{1}{2}\beta(1 + \varepsilon)e^{-2x} \; . \qquad (11)$$

D'après l'équation (F'), on a, dès que x dépasse une constante dépendant seulement de ε:

$$\frac{dy}{dx} > -\frac{\alpha\beta}{2}(1 + \varepsilon)^2 e^{-2x} + \beta(1 - \varepsilon)e^{-2x}$$

α étant inférieur à 1, lorsque ε est suffisamment petit l'inégalité précédente entraîne *a fortiori* l'inégalité:

$$\frac{dy}{dx} > \frac{\beta}{2}(1 - \varepsilon)e^{-2x}$$

et en intégrant:

$$y_0'' - y > \frac{\beta}{4}(1 - \varepsilon)e^{-2x} \; . \qquad (11')$$

D'où la propriété asymptotique suivante, déduite des inégalités (11) et (11'):

Lorsque x *tend vers* $+\infty$, *le produit* $(y_0'' - y)e^{2x}$ *reste compris, sur la courbe de deuxième catégorie, entre deux constantes positives.*

27. — *Courbes asymptotes à la droite d'ordonnée* y_0'. — Aux environs de cette droite, la quantité $a(1 + \mathrm{tg}^2\, y) + \mathrm{tg}\, y$ est de l'ordre de grandeur de $y_0' - y$. D'une façon plus précise, le rapport

$$\frac{a(1 + \mathrm{tg}^2 y) + \mathrm{tg}\, y}{y_0' - y}$$

tend, lorsque y tend vers y_0', vers la quantité:

$$\gamma = \frac{\sqrt{1 - 4a^2}\,(1 + \sqrt{1 - 4a^2})}{2a^2} = \frac{2\sqrt{1 - 4a^2}}{1 - \sqrt{1 - 4a^2}}$$

en étant supérieur à γ lorsque y est inférieur à y_0', et inférieur à γ lorsque y est supérieur à y_0'.

La quantité: $-\mathrm{tg}\, y\,(1 - \mathrm{th}\, x)$ est de l'ordre de grandeur de e^{-2x}. D'une façon plus précise, le rapport $\dfrac{-\mathrm{tg}\, y\,(1 - \mathrm{th}\, x)}{e^{-2x}}$ tend vers la quantité:

$$\delta = \frac{1 + \sqrt{1 - 4a^2}}{a} = \frac{4a}{1 - \sqrt{1 - 4a^2}}$$

quand x augmente indéfiniment, et quand y tend vers y_0'. Ce rapport est inférieur à δ lorsque y est supérieur à y_0'. On ne peut rien dire lorsque y est inférieur à y_0'.

28. — *Courbes de troisième catégorie.* — On suppose y supérieur à y_0', et x assez grand. Le coefficient angulaire $\dfrac{dy}{dx}$ vérifie alors les inégalités:

$$\frac{dy}{dx} < \gamma(1 - \varepsilon)(y_0' - y) + \delta e^{-2x} \tag{12}$$

$$\frac{dy}{dx} > \gamma(y_0' - y) + \delta(1 - \varepsilon)e^{-2x}\,. \tag{12'}$$

ε est une constante positive, dépendant de la position du point M_1 de coordonnées $(x_1\, y_1)$ à partir duquel on étudie la branche de la courbe intégrale. ε est arbitrairement petit, pourvu que ce point soit situé assez loin.

La courbe intégrale étudiée est donc, pour x supérieur à x_1, située constamment au-dessus de l'intégrale de l'équation:

$$\frac{dy}{dx} = \gamma(y_0' - y) + \delta(1 - \varepsilon)e^{-2x}$$

issue du point M_1, et constamment au-dessous de l'intégrale de l'équation:

$$\frac{dy}{dx} = \gamma(1 - \varepsilon)(y_0' - y) + \delta e^{-2x}$$

issue du point M_1. Par suite, la courbe intégrale vérifie les inégalités:

$$y - y_0' \leqq Ce^{-\gamma(1-\varepsilon)x} + \frac{\delta}{\gamma(1 - \varepsilon) - 2}e^{-2x}$$

$$y - y_0' \geqq C'e^{-\gamma x} + \frac{\delta(1 - \varepsilon)}{\gamma - 2}e^{-2x}.$$

Lorsque γ est égal à 2, cette inégalité doit être remplacée par la suivante:

$$y - y_0' \geqq [C'' + \delta(1 - \varepsilon)x]e^{-2x}$$

C, C$'$, ou, le cas échéant, C$''$, sont des constantes déterminées par la condition que ces inégalités, se transforment en égalités au point M_1.

Lorsque γ est supérieur à $2\left(a < \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $y - y_0'$ est de l'ordre de e^{-2x}. Lorsque γ est inférieur à $2\left(a > \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, C et C$'$ sont positifs, et $y - y_0'$ est d'un ordre compris entre $e^{-\gamma x}$ et $e^{-\gamma(1-\varepsilon)x}$. Lorsque $\gamma = 2\left(a = \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ $y - y_0'$ est d'un ordre compris entre e^{-2x} et xe^{-2x}.

29. — *Courbes de quatrième catégorie.* — Elles satisfont aux inégalités:

$$\frac{dy}{dx} < \gamma(1 + \varepsilon)(y_0' - y) + \delta(1 + \varepsilon)e^{-2x} \tag{13}$$

$$\frac{dy}{dx} > \gamma(y_0' - y) + \delta(1 - \varepsilon)e^{-2x} \tag{13'}$$

à partir d'un point M_1; la constante positive ε est arbitrairement petite et ne dépend que de la position de M_1. L'étude se poursuit parallèlement à la précédente. La dernière inégalité entraîne soit l'inégalité:

$$y_0' - y \leqq C'e^{-\gamma x} + \frac{\delta(1 - \varepsilon)}{2 - \gamma}e^{-2x} \qquad (\gamma \neq 2) \tag{14'}$$

soit l'inégalité:

$$y'_0 - y \leqq [C'' - \delta(1-\varepsilon)x]e^{-2x} \qquad (\gamma = 2) \; . \qquad (14'')$$

C′ et C″ sont déterminées comme plus haut. On constate immédiatement que *lorsque* γ *est supérieur ou égal à* 2, quelle que soit la valeur de C′ ou de C″, $y'_0 - y$ finit par devenir négatif: donc *il n'existe pas de courbe de* 4^me^ *catégorie.*

Lorsque γ est inférieur à $2\left(a > \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $y'_0 - y$ satisfait aux inégalités (14′) et:

$$y'_0 - y \geqq Ce^{-\gamma(1+\varepsilon)x} + \frac{\delta(1+\varepsilon)}{2-\gamma(1+\varepsilon)} e^{-2x} \; . \qquad (14)$$

Pour fixer les idées, on choisira pour ε la valeur $\frac{2-\gamma}{2\gamma}$; le point M_1 peut alors être choisi à l'intérieur d'une certaine bande:

$$x \geqq x_1 \qquad y_1 \leqq y \leqq -\frac{\pi}{4}$$

et si, en outre, il est choisi sous ou sur la courbe d'équation:

$$y'_0 - y = \frac{\delta(2+\gamma)}{\gamma(2-\gamma)} e^{-2x} \; ,$$

la constante C de l'inégalité (14) est nulle, ou positive, *et la différence* $y'_0 - y$ *reste positive;* donc: *Lorsque* γ *est inférieur à* $2\left(a > \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ *il existe des courbes de quatrième catégorie.*

Sur ces courbes, $y'_0 - y$ est d'un ordre de grandeur compris entre $e^{-\gamma x}$ et $e^{-\gamma(1+\varepsilon)x}$.

30. — *Courbe-limite de quatrième catégorie.* — Le groupe des courbes intégrales de quatrième catégorie est limité à gauche, par une courbe qui fait partie de ce groupe. Donnons quelques indications sur la position du point R d'intersection de la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{2}$ et de cette courbe-limite.

Sur la partie de cette courbe située dans la bande définie au n° 2, le coefficient angulaire est supérieur à $\gamma(y'_0 - y) + \frac{\delta}{2}e^{-2x}$; la courbe intégrale de l'équation:

$$\frac{dy}{dx} = \gamma(y'_0 - y) + \frac{\delta}{2} e^{-2x}$$

issue du point R, est donc asymptote à la droite d'ordonnée y'_0, et constamment au-dessous de cette droite, puisqu'elle est au-dessous de la courbe-limite étudiée. Il est nécessaire pour cela que l'abscisse de R soit supérieure ou égale à celle du point d'intersection de la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{2}$ et de la courbe:

$$y'_0 - y = \frac{\delta}{2(2-\gamma)} e^{-2x} .$$

On en déduit *a fortiori* que *l'abscisse de* R *est supérieure à*

$$\frac{1}{15\left(a - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}$$

et tend donc vers $+\infty$ *lorsque* a *tend vers* $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Etudions la position-limite de R lorsque a tend vers $\frac{1}{2}$. Les constantes γ et δ tendent respectivement vers 0 et 2.

Lorsque y est voisin de $-\frac{\pi}{4}$, le rapport: $\frac{a(1 + \operatorname{tg}^2 y) + \operatorname{tg} y}{y'_0 - y}$ est voisin de 0. Choisissons, pour fixer les idées, des valeurs de y suffisamment proches de $-\frac{\pi}{4}$ pour que l'on ait l'inégalité:

$$y'_0 - y \leqq -\frac{\pi}{4} - y'_0 . \tag{15}$$

Cette inégalité entraîne l'inégalité:

$$\frac{dy}{dx} < \varepsilon(y'_0 - y) + 2(1 + \eta) e^{-2x}$$

ε et η sont des quantités qui tendent vers zéro avec $\frac{1}{2} - a$.

L'inégalité précédente montre que l'on a:

$$y'_0 - y \geqq C e^{-\varepsilon x} + (1 + \varepsilon') e^{-2x}$$

où $1 + \varepsilon' = \frac{2(1+\eta)}{2-\varepsilon}$, et où la constante C est déterminée par la condition d'égalité pour le point $x_1 y_1$ à partir duquel on étudie la branche de courbe. Cette courbe est de quatrième catégorie si l'on prend:

$$y'_0 - y_1 = (1 + \varepsilon') e^{-2x_1}$$

puisque C est alors nul. y_1 est limité par l'inégalité (15), nous pouvons prendre:

$$y'_0 - y_1 = -\frac{\pi}{4} - y'_0 \tag{15'}$$

d'où:

$$-\frac{\pi}{4} - y_1 = 2(1 + \varepsilon')\, e^{-2x_1} . \tag{16}$$

Par tout point de la courbe (16) *passe donc une courbe de quatrième catégorie.* La valeur de a correspondante est donnée par l'inégalité (15'). ε' est une fonction de a tendant vers zéro lorsque a tend vers $\frac{1}{2}$. C'est donc une fonction de x_1 tendant vers zéro quand x_1 tend vers $+\infty$.

Comparons maintenant avec les courbes du premier type $\left(a = \frac{1}{2}\right)$. Soit M un point de la courbe (16). Par M passe une courbe du premier type, et une courbe de quatrième catégorie située, entre M et la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{2}$, au-dessus de la courbe du premier type, d'après la remarque du n° 6. Lorsque l'abscisse de M tend vers l'infini, le point d'intersection de la droite d'ordonnée $-\frac{\pi}{2}$ et de la courbe du premier type tend vers le point S (ceci résulte de ce que sur toute courbe du premier type, le produit $x\left(-\frac{\pi}{4} - y\right)$ finit par être compris entre deux constantes positives. Donc aucune courbe du premier type ne peut être située constamment au-dessus de la courbe (16)).

Il résulte de ce qui précède que l'abscisse du point R finit par rester inférieure à une quantité aussi voisine que l'on veut de l'abscisse de S. D'autre part le point R se trouve nécessairement à droite du point T, et ce dernier point tend vers le point S (n° 25). Donc:

Lorsque a *tend vers* $\frac{1}{2}$, *le point* R *tend vers le point* S.

31. — Les portions des courbes intégrales situées dans la bande:

$$x \leqq 0 \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq +\frac{\pi}{2}$$

se déduisent des portions étudiées jusqu'ici par symétrie par rapport à O.

On passe ensuite à une courbe intégrale tout entière par translation parallèle à l'axe Oy [1].

[1] Les courbes (γ) et (δ) (voir la note du n° 9) possèdent, lorsque x tend vers $+\infty$, des asymptotes.

On peut se borner à la construction du groupe d'intégrales asymptotes, lorsque x tend vers $+\infty$, aux droites y_0' et y_0''. Ce groupe admet comme courbe-limite à gauche la courbe de deuxième catégorie (par

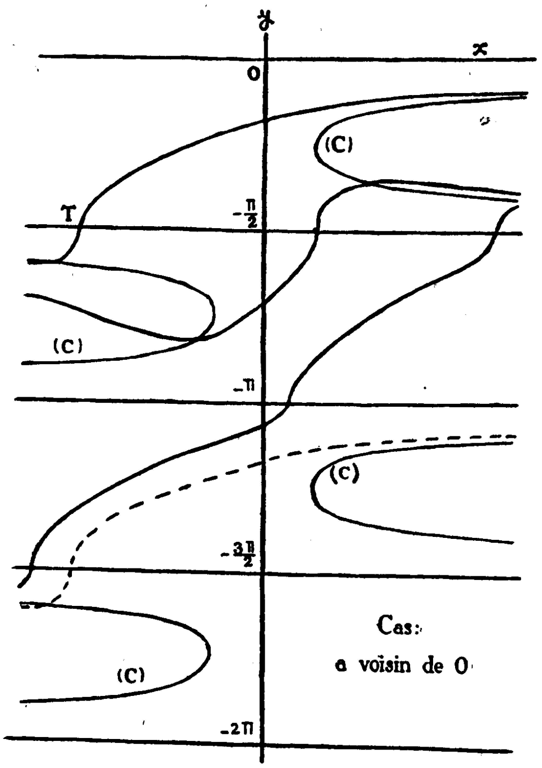

Fig. 3.

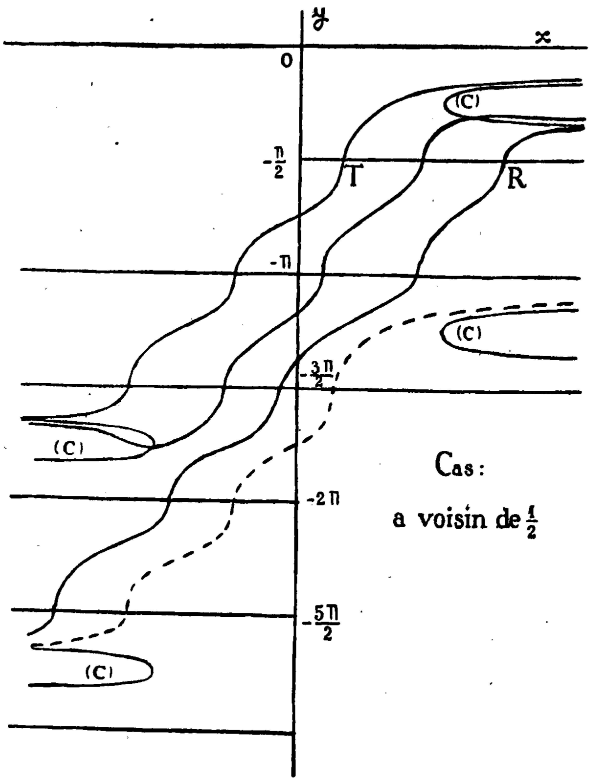

Fig. 4.

rapport à y_0'') et comme courbe-limite à droite la même, à laquelle on a fait subir une translation de $-\pi$ parallèlement à Oy. Cette dernière courbe-limite ne fait pas partie du groupe. Elle est tracée en pointillé sur les figures.

Les cas de a voisin de O, a voisin de $\frac{1}{2}$ fournissent deux genres de figures.