Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 29 (1930)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE.

Artikel: SUR LA CONSTANTE D'EULER
Autor: Appell, Paul
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23245

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 26.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR LA CONSTANTE D'EULER

PAR

M. Paul APPELL, Membre de l'Institut (Paris).

La formule à obtenir est basée sur la limite de

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$$

lorsque m entier devient infini. On a

$$C = H(k) - \log k + S(k)$$

où $\lim S(k) = 0$ pour $k = \infty$ et où

$$H(k) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k-1} .$$

Dans ce qui suit, quand cela paraîtra plus clair, on écrira aussi

$$S[k] , \quad H[k] \quad \text{pour} \quad S(k) , \quad H(k) .$$

Alors

$$C = H[(\mu m + \lambda)^m] - m \log(\mu m + \lambda) + S[(\mu m + \lambda)^m] \qquad (1)$$

et aussi

$$C = H(\mu m^m) - m \log(\mu m) + S(\mu m^m)$$

d'où, par soustraction,

$$0 = H[(\mu m + \lambda)^m] - H(\mu m^m) - \log\left(1 + \frac{\lambda}{\mu m}\right)^m$$
$$+ S[(m\mu + \lambda)^m] - S(\mu m^m) ,$$

le rapport $\lambda : \mu$ étant irréductible.

Pour $m = \infty$,

$$0 = \lim \left\{ H[(\mu m + \lambda)^m] - H(\mu m^m) \right\} - \frac{\lambda}{\mu}$$

d'où, en retranchant de (1) et supposant m infini,

$$C - \frac{\lambda}{\mu} = \lim \left\{ H(\mu m^m) - m \log(\mu m + \lambda) \right\} .$$

Telle est la formule que j'avais en vue.

On a, avec $m : p$ entier,

$$C = H\left[(\mu m - \lambda)^{\frac{m}{p}}\right] - \log(\mu m - \lambda)^{\frac{m}{p}} + S\left[(\mu m - \lambda)^{\frac{m}{p}}\right] ,$$

$$pC = pH\left[(\mu m - \lambda)^{\frac{m}{p}}\right] - \log(\mu m - \lambda)^m + pS\left[(\mu m - \lambda)^{\frac{m}{p}}\right] .$$

D'autre part, on a, comme plus haut,

$$C = H[(\mu m)^m] - \log(\mu m)^m + S[(\mu m)^m]$$

et, en retranchant,

$$(p-1)C = pH\left[(\mu m - \lambda)^{\frac{m}{p}}\right] - H[(\mu m)^m] - \log \frac{(\mu m - \lambda)^m}{(\mu m)^m}$$
$$+ pS\left[(\mu m - \lambda)^{\frac{m}{p}}\right] - S[(\mu m)^m] .$$

En posant $m = pn$, avec m entier multiple de n, il vient

$$(p-1)C = pH[(\mu pn - \lambda)^n] - H[(\mu pn)^{pn}] - \log \frac{(\mu pn - \lambda)^{pn}}{(\mu pn)^{pn}} + \ldots$$

En prenant $p = 2$, on a

$$C = 2H[(2\mu n - \lambda)^n] - H[(2\mu n)^{2n}] - \log \frac{(2\mu n - \lambda)^{2n}}{(2\mu n)^{2n}} + \ldots$$

d'où, pour $n = \infty$,

$$C = \lim_{n=\infty} \left\{ 2H[(2\mu n - \lambda)^n] - H[(2\mu n)^{2n}] \right\} + \frac{\lambda}{\mu} .$$

Ces résultats s'ajoutent évidemment à d'autres déjà publiés par *L'Enseignement mathématique* (T. XXVI, 1927, p. 11).