Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 29 (1930)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE.

Artikel: SUR LA CONSTANTE D'EULER
Autor: Appell, Paul
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23245

SUR LA CONSTANTE D'EULER

PAR

M. Paul APPELL, Membre de l'Institut (Paris).

La formule à obtenir est basée sur la limite de

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$$

lorsque m entier devient infini. On a

$$C = H(k) - \log k + S(k)$$

où $\lim S(k) = 0$ pour $k = \infty$ et où

$$H(k) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k-1} \,.$$

Dans ce qui suit, quand cela paraîtra plus clair, on écrira aussi

$$S[k] \;,\quad H[k] \qquad \text{pour} \qquad S(k) \;,\quad H(k) \,.$$

Alors

$$C = H[(\mu m + \lambda)^m] - m \log(\mu m + \lambda) + S[(\mu m + \lambda)^m] \tag{1}$$

et aussi

$$C = H(\mu m^m) - m \log(\mu m) + S(\mu m^m)$$

d'où, par soustraction,

$$0 = H[(\mu m + \lambda)^m] - H(\mu m^m) - \log\left(1 + \frac{\lambda}{\mu m}\right)^m$$
$$+ S[(m\mu + \lambda)^m] - S(\mu m^m) \;,$$

le rapport $\lambda : \mu$ étant irréductible.

Pour $m = \infty$,

$$0 = \lim \left\{ H[(\mu m + \lambda)^m] - H(\mu m^m) \right\} - \frac{\lambda}{\mu}$$

d'où, en retranchant de (1) et supposant m infini,

$$C - \frac{\lambda}{\mu} = \lim \left\{ H(\mu m^m) - m \log(\mu m + \lambda) \right\} .$$

Telle est la formule que j'avais en vue.

On a, avec $m : p$ entier,

$$C = H\left[(\mu m - \lambda)^{\frac{m}{p}}\right] - \log(\mu m - \lambda)^{\frac{m}{p}} + S\left[(\mu m - \lambda)^{\frac{m}{p}}\right] ,$$

$$pC = pH\left[(\mu m - \lambda)^{\frac{m}{p}}\right] - \log(\mu m - \lambda)^m + pS\left[(\mu m - \lambda)^{\frac{m}{p}}\right] .$$

D'autre part, on a, comme plus haut,

$$C = H[(\mu m)^m] - \log(\mu m)^m + S[(\mu m)^m]$$

et, en retranchant,

$$(p-1)C = pH\left[(\mu m - \lambda)^{\frac{m}{p}}\right] - H[(\mu m)^m] - \log\frac{(\mu m - \lambda)^m}{(\mu m)^m}$$
$$+ pS\left[(\mu m - \lambda)^{\frac{m}{p}}\right] - S[(\mu m)^m] .$$

En posant $m = pn$, avec m entier multiple de n, il vient

$$(p-1)C = pH[(\mu pn - \lambda)^n] - H[(\mu pn)^{pn}] - \log\frac{(\mu pn - \lambda)^{pn}}{(\mu pn)^{pn}} + \dots$$

En prenant $p = 2$, on a

$$C = 2H[(2\mu n - \lambda)^n] - H[(2\mu n)^{2n}] - \log\frac{(2\mu n - \lambda)^{2n}}{(2\mu n)^{2n}} + \dots$$

d'où, pour $n = \infty$,

$$C = \lim_{n=\infty} \left\{ 2H[(2\mu n - \lambda)^n] - H[(2\mu n)^{2n}] \right\} + \frac{\lambda}{\mu} .$$

Ces résultats s'ajoutent évidemment à d'autres déjà publiés par *L'Enseignement mathématique* (T. XXVI, 1927, p. 11).