3. — Prolongement analytique dans le plan z.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1931)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

La convergence uniforme de la série (4) dans C′ entraîne l'holomorphie de la fonction qu'elle représente, aussi par rapport à z à l'intérieur du cercle Γ_1, résultat qu'on établit à l'aide du théorème classique de Weierstrass qui se réfère aux séries de fonctions holomorphes. *Il résulte donc que la série* (4′) *représente une fonction holomorphe par rapport à l'ensemble des deux variables* z *et* λ *respectivement à l'intérieur des cercles* Γ_1 *et* C′.

3. — Prolongement analytique dans le plan z.

La méthode utilisée pour établir le caractère effectif de la série (4′) à l'intérieur du cercle Γ_1 peut être employée, après une simple transformation du système récurrent (2′), aussi au prolongement analytique dans le plan z de l'élément de fonction qu'on obtient en développant cette série suivant les puissances entières et positives de z. En effet, supposons que de tout l'ensemble des zéros des polynomes $P_m(z)$ il n'y ait qu'un seul situé sur le cercle Γ_1, le point ζ, qui annule seulement le polynome $P_p(z)$. Nous supposerons de plus que c'est un zéro de degré *un* de multiplicité.

Ceci précisé, remarquons qu'en multipliant la série (4′) par $\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)$ et effectuant les réductions, le point ζ n'annulera plus les dénominateurs des expressions qui correspondent aux divers coefficients des puissances de λ ainsi modifiés. *Formellement*, le point ζ n'apparaît plus comme un pôle de la fonction représentée par la série (4′) multipliée par le facteur considéré. Nous allons montrer que ceci a lieu aussi d'une manière *effective*. Pour cela, posons

$$\Phi_m^1(z) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)\Phi_m(z) \qquad (m = p\,,\ p + 1\,,\ \ldots)$$

et désignons par $P_p^1(z)$ le polynome $P_p(z)$ dans l'expression duquel on aurait supprimé le facteur $\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)$. Le système récurrent (2′)

pourra alors s'écrire

$$\rho^m P_m(z)\, \Phi_m(z) = \sum_{n=1}^{m} \rho^{m-n} Q_{m,n}(z)\, \Phi_{m-n}(z) + R_m(z)$$

$$(m = 0, 1, \dots p-1)$$

$$\rho^p P_p^1(z)\, \Phi_p^1(z) = \sum_{n=1}^{p} \rho^{p-n} Q_{p,n}(z)\, \Phi_{p-n}(z) + R_p(z) \qquad (2'')$$

$$\rho^m P_m(z)\, \Phi_m^1(z) = \sum_{n=m-p+1}^{m} \rho^{m-n}\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) Q_{m,n}(z)\, \Phi_{m-n}(z) +$$

$$\sum_{n=0}^{m-p} \rho^{m-n} Q_{m,n}(z)\, \Phi_{m-n}^1(z) + R_m(z) \cdot \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \qquad (m > p)$$

et nous voyons qu'il rentre dans le même type (2), les racines des polynomes $P_m(z)$ correspondants étant situées à l'extérieur du cercle Γ_1. Soit Γ_2 le cercle concentrique à Γ_1 qui passe par le zéro de la suite

$$P_0(z)\,,\ P_1(z)\,,\ \dots,\ P_{p-1}(z)\,,\ P_p^1(z)\,,\ P_{p+1}(z)\,,\ \dots$$

le plus proche de l'origine. Pour z intérieur à ce cercle, la série

$$\sum_{n=0}^{p-1} \lambda^n \Phi_n(z) + \sum_{m=p}^{\infty} \lambda^m \Phi_m^1(z) \qquad (14)$$

converge uniformément dans le même cercle C′, car la limite (13) ne dépend pas de $P_p^1(z)$, et le maximum sur D du facteur $\left(1 - \frac{|z|}{|\zeta|}\right)$ est égal à l'unité. Le cercle de convergence de cette série et, par conséquent, aussi le cercle C′, ne changent pas si l'on remplace dans (14) les $\Phi_n(z)$, $(n = 0, 1, \dots p-1)$, par d'autres fonctions $\Phi_n^1(z)$ vérifiant les relations

$$\Phi_n^1(z) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \cdot \Phi_n(z) \qquad (n = 0, 1, \dots p-1)\,.$$

Nous pouvons alors écrire d'une manière effective, pour z intérieur à Γ_2,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \Phi_m(z) = \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Phi_n^1(z) \right],$$

les $\Phi_m(z)$ étant précisément les fonctions rationnelles (3), et comme la série du second membre représente une fonction holomorphe par rapport aux deux variables z et λ respectivement dans Γ_2 et C′, *il résulte que le point* ζ *est effectivement un pôle pour la fonction définie par la série* (4′).

Ce procédé s'applique évidemment aussi dans le cas où il y aurait encore d'autres zéros $\zeta_{m,\,i}$ en nombre fini sur le cercle Γ_1, quels que soient leurs ordres de multiplicité. Il faut bien entendu supposer que les zéros $\zeta_{m,\,i}$ n'annulent pas une infinité de polynomes $P_m(z)$.

4. — Existence du rayon de convergence R.

Indiquons maintenant les cas simples où le rayon R existe et est bien déterminé. Nous supposerons bien entendu que les cercles Γ_i introduits dans le paragraphe précédent, appartiennent *entièrement* au domaine d'existence D relatif aux fonctions (5) et (10).

*I*er *cas. — Les polynomes* $P_m(z)$ *tendent uniformément vers un polynome* P (z) *ou vers une fonction entière de genre zéro.* Dans ce cas, les racines de la fonction $P(z)$ apparaissent comme des points singuliers essentiels pour *la fonction représentée par la série* (4′), *qui est méromorphe dans le cercle* Γ, *de centre* O_z, *passant par le plus proche de l'origine zéro de* P(z). Nous ne pouvons établir avec la méthode de prolongement analytique introduite, le caractère effectif de la série (4′) à l'extérieur de Γ.

Dans toutes ces considérations, il faut tenir compte évidemment de la fonction limite $\overline{Q}(z)$ relative à la suite des maxima $\overline{Q}_m(z)$. Nous reviendrons dans un autre article pour préciser la nature de cette fonction.