SUR LE PENDULE DE LONGUEUR VARIABLE

Autor(en): **Cassina, U.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1931)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-23897

Si l'on choisit dès ce moment pour z_{n+1} *la valeur principale de* $\log(1 + z_n)$, *alors* $\lim_{n \to \infty} z_n = 0$.

II. *En partant d'un point* β_γ, *il y a une seule manière d'itération de la fonction* $\log(1 + z)$ *qui conduit à* $z_{\gamma+1} = \infty$, *et pour toutes les autres manières les* z_n *finissent par se trouver dans la condition* I.

SUR LE PENDULE DE LONGUEUR VARIABLE

PAR

U. CASSINA (Milan).

J'ai lu avec intérêt la Note de M. R. THIRY, *Sur le lancement du pendule par modification de sa longueur* (*L'Enseignement mathématique*, t. XXIX, 1930, p. 75-80) et je désire y ajouter quelques remarques.

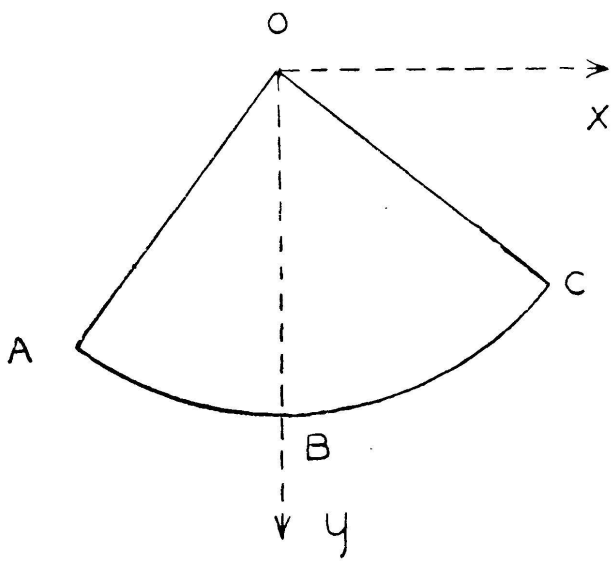
1. — La balançoire peut être considérée comme un pendule simple de longueur variable: le point pesant oscillant est le centre de gravité de l'enfant qui se promène sur la balançoire.

Si O est le point de suspension, A la position initiale du point pesant, B sa position sur la verticale par O, et C la position finale après une oscillation simple; alors l'enfant s'accroupit dans la branche descendante AB et se hausse *plus vite* (cfr. nº 2) dans la branche ascendante BC, et ainsi il augmente l'amplitude de l'oscillation.

L'explication rationnelle des mouvements que fait l'enfant afin d'augmenter l'amplitude des oscillations de la balançoire, découle immédiatement du théorème suivant:

« Le centre de gravité de l'aire OABC, décrite par le fil du « pendule dans une oscillation simple (dans le vide) tombe sur « la verticale qui passe par le point de suspension O. »

En voici la démonstration:



Supposons que le point mobile P soit de masse unitaire; alors le point P est sollicité par deux forces: l'une est la gravité g, l'autre est la tension du fil, dirigée de P vers O.

Prenons le point O comme origine d'un système de coordonnées cartésiennes, dont l'axe x est horizontal et l'axe y vertical (v. fig.).

Alors les équations différentielles du mouvement sont:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \, , \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = g - ky \, , \tag{1}$$

où k est une quantité positive qui dépend de la tension du fil. En éliminant k on a:

$$y \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2y}{dt^2} = -gx \tag{2}$$

ou:

$$\frac{d}{dt}\left(y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt}\right) = -gx \, . \tag{3}$$

Introduisons, maintenant, des coordonnées polaires dont Oy est l'axe polaire, ρ le rayon vecteur et θ l'argument. Alors on a les formules de transformation:

$$x = \rho \sin\theta \, , \qquad y = \rho \cos\theta \, , \tag{4}$$

et la formule (3) devient:

$$\frac{d}{dt}\left(\rho^2 \frac{d\theta}{dt}\right) = -g\rho \sin\theta \, . \tag{5}$$

A cette formule (5) on peut aussi parvenir par le théorème des aires. En multipliant, par le facteur intégrant $\rho^2 \frac{d\theta}{dt}$, on a:

$$\left(\rho^2 \frac{d\theta}{dt}\right) \frac{d}{dt} \left(\rho^2 \frac{d\theta}{dt}\right) = - g\rho^3 \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \tag{6}$$

et, après intégration:

$$\frac{1}{2} \Delta \left(\rho^2 \frac{d\theta}{dt}\right)^2 = - g \int \rho^3 \sin \theta \, d\theta , \tag{7}$$

où Δ représente l'accroissement de la fonction relatif aux limites de l'intégrale.

Si nous intégrons entre les extrêmes A et C de l'oscillation simple, où la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$ est nulle, on a, entre ces limites,

$$\int \rho^3 \sin \theta d\theta = 0 . \tag{8}$$

Mais $\frac{1}{2} \rho^2 d\theta$ est l'aire du secteur infinitésimal décrit par le fil, $\frac{2}{3} \rho \sin \theta$ est la distance de la verticale OB du centre de gravité de cette aire; donc $\frac{1}{3} \int \rho^3 \sin \theta d\theta$ est le moment, par rapport à la verticale OB, de l'aire OABC.

Mais ce moment est nul, donc le centre de gravité de l'aire OABC tombe sur la verticale OB.

La formule (7) ne diffère pas de la formule (1) de la Note de M. Thiry, et se trouve déjà dans la petite Note de M. G. Peano, *Sul pendolo di lunghezza variabile* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. X, 1896, p. 36-37). Ici, l'auteur donne l'interprétation géométrique suivante de la formule (8):

« Les volumes décrits par les secteurs OAB et OBC, dans la « rotation autour de OB sont égaux. »

Le livre *Meccanica razionale* des professeurs C. Burali-Forti et T. Boggio (Lattes, Torino, 1921, p. 394) contient le théorème de M. Peano et considère aussi le mouvement du pendule de longueur variable dans un milieu résistant.

2. — Comme corollaires immédiats on a les propositions suivantes, qui donnent l'explication rationnelle des mouvements du seau dans le puits et de la balançoire:

a) « Pour augmenter l'amplitude des oscillations du pendule « de longueur variable (oscillant dans le vide) il *suffit* de rac- « courcir toujours la longueur du pendule (cas du *seau dans le* « *puits*); et

b) « Il *suffit* aussi d'allonger (ou de conserver constante) la « longueur du pendule dans la branche descendante et de la « raccourcir dans la branche ascendante de manière que, dans « les points également inclinés sur la verticale, la longueur du « pendule au point où il descend soit supérieure à celle qu'il a « dans le point où il monte (cas de la *balançoire*). »

Cfr. ma recension sur le livre précédent, publiée dans le *Bollettino di Matematica* (di Conti e Loria), n. 4-5-6, annata XVIII, Bologna (Cuppini), 1922, p. LVI.

Milan, le 15 mai 1931.