Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 30 (1931)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

Emile PICARD. — **Quelques applications analytiques de la Théorie des Courbes et des Surfaces algébriques.** Leçons rédigées par M. Jean Dieudonné (Cahiers scientifiques publiés sous la direction de M. Gaston Julia. Fascicule IX). — Un vol. gr. in-8° de VIII-224 pages et 11 figures. Prix : 50 francs. Gauthier-Villars & Cie, Paris, 1931.

Ce volume est le quatrième, des « Cahiers Julia », que nous devons à M. Emile Picard. On sait que l'illustre géomètre semblait avoir renoncé à la publication du tome quatrième de son grand *Traité d'Analyse*, du moins sous la forme parfaite obtenue pour les trois premiers volumes. Nombreuses étaient les théories conservant encore des lacunes et des dissymétries s'opposant à une exposition méthodiquement enchaînée et cependant il était bien regrettable de ne pas avoir ces théories sous la forme actuelle incitant précisément au travail qui pourrait les compléter. Les cahiers créés par M. Julia sont intervenus ici avec le plus grand à-propos, le Maître nous livrant, par leur intermédiaire, de merveilleuses Leçons et ce, à l'époque, où des règlements par trop stricts l'éloignent d'une Chaire d'Analyse supérieure occupée avec un éclat qui fit toujours l'admiration du monde scientifique.

Le présent volume, s'il pose encore bien des problèmes, est cependant loin de manquer d'enchaînement. C'est presque un lieu commun de rappeler que, bien qu'il existe une théorie géométrique des courbes algébriques, ces courbes ne sont véritablement bien connues qu'avec les intégrales abéliennes y attachées et que l'intégrale abélienne elle-même n'est pas complètement étudiée si on la laisse en deçà du problème de l'inversion. Sur ce dernier point, on sait quelles pages ardues nous ont été léguées par Briot et plus récemment par Jordan. Est-ce l'effet de l'effort fait autrefois avec ces auteurs ou celui des habitudes riemanniennes si ancrées maintenant dans la Science ou tout simplement l'art d'exposition de M. Emile Picard, il semble bien, de toutes façons, que le sujet soit devenu relativement simple et les fonctions thêta tout-à-fait maniables, ne serait-ce que parce que l'on commence par l'intégrale de première espèce à partir du cas elliptique. Plus généralement les fonctions thêta sont toujours remarquables comme fonctions à multiplicateurs éliminables en de certains quotients et la suprême esthétique du théorème d'Abel donne, à ces aperçus sur les fonctions abéliennes, un cachet d'élégance qu'il semble bien difficile de surpasser. La méthode est d'ailleurs susceptible de variantes comprenant, par exemple, une brillante généralisation de l'équation différentielle d'Euler.

Les fonctions méromorphes quadruplement périodiques (Ch. II) prennent des caractères algébriques et même rationnels quand de certaines liaisons apparaissent dans la quadruple périodicité. Il y a encore là une brillante extension de lemmes elliptiques. Les méthodes de M. Picard conduisent de même (Ch. III) à retrouver la représentation paramétrique fuchsienne des courbes algébriques dévoilée par Henri Poincaré dans un ordre d'idées plutôt inverse en partant plus des propriétés uniformisantes de la fonction fuchsienne que de la nature même de la courbe.

En possession de la notion de fonction automorphe, nous pouvons y adjoindre (Ch. IV) de profondes généralités sur l'équation $\Delta u = ke^u$. Il y a là une des plus belles liaisons entre les surfaces à courbure totale constante sur lesquelles existe une géométrie non-euclidienne et cette dernière géométrie naturellement liée, d'autre part, au groupe fuchsien.

En trois derniers chapitres, M. Emile Picard passe aux surfaces algébriques et aux intégrales simples ou doubles qui peuvent y être attachées, en suivant, *autant que possible* l'ordre des résultats acquis avec les courbes. Mais on aperçoit promptement combien il est nécessaire de souligner les mots *autant que possible*. Les intégrales de différentielles totales sont naturellement accompagnées de conditions d'intégrabilité; les intégrales doubles peuvent prendre des formes *stokiennes* qui leur confèrent plutôt des propriétés d'intégrales simples. Dans de tels cas, le terrain devient d'une transcendance tout à fait nouvelle: des nombres entiers, à histoire déjà célèbre, s'attachent aux surfaces algébriques comme le *genre* s'attache aux courbes mais avec des difficultés arithmétiques insoupçonnables dans la théorie des intégrales abéliennes. C'est ici qu'apparaît un Analysis situs, une topologie appelant encore de nombreux perfectionnements tandis qu'en matière abélienne à une variable, la notion de surface de Riemann semble aujourd'hui définitive.

Quatre Notes, déjà publiées en 1903, 1905, 1889, 1883, terminent un exposé qui lie surtout le tome II du *Traité d'Analyse* aux *Fonctions algébriques de deux variables* de MM. Picard et Simart. Ce lien semble particulièrement heureux et presque susceptible d'être étudié sans étude développée des ouvrages qu'il unit. On se reportera à ceux-ci là ou M. Picard indique la nécessité du rapprochement. Et avant de fouiller, par un travail persévérant, le détail logique des choses, ces nouvelles Leçons permettront un premier coup d'œil d'ensemble d'où sortiront aisément d'utiles et profondes intuitions.

A. BUHL (Toulouse).

Alexander OSTROWSKI. — **Studien über den Schottkyschen Satz.** — Un volume gr. in-8° de IV-112 pages. Prix: 5 francs suisses. B. Wepf & Cie, Bâle, 1931.

Cette analyse nous paraît devoir être placée, ici, immédiatement après celle consacrée aux dernières Leçons de M. Emile Picard. Les sujets ne sont pas les mêmes mais ils dépendent du même animateur. Il s'agit du théorème que M. Picard nous donna, voici un demi-siècle, sur les valeurs qu'une fonction entière ne peut pas prendre, en un Mémoire célèbre reproduit récemment en tête de *Selecta* (voir *L'Enseignement mathématique*, t. 27, 1928, pp. 11 et 155). Depuis cinquante ans, ce théorème a eu de prodigieuses répercussions. On a voulu l'approfondir, le rendre indépendant de la fonction modulaire, le généraliser d'une foule de manières et le lemme de Schottky représente assez bien aujourd'hui l'aboutissement de ces vastes efforts qui, entre temps, ont été l'objet de nombre d'expositions systématiques, telles celles de la *Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions* publiée par M. Emile Borel. Si nous disons « assez bien », ce n'est pas pour critiquer, si peu que ce soit, la belle synthèse de M. Ostrowski, c'est parce que le sujet, précisément à cause de sa prodigieuse fécondité, a une multiplicité de physionomies qui le rendent presque impossible à représenter intégralement en une exposition unique, pour laquelle il faut cependant se décider si l'on veut faire œuvre vraiment utile. Il est probable aussi que ce lemme de Schottky, si bien construit soit-il, n'a rien d'un véritable aboutissement. Il laisse le champ ouvert sur de nouveaux horizons et ce d'une manière particulièrement commode; c'est là sa véritable et très grande valeur.

Au fond la question est celle des équations sans racines ou des racines ne pouvant être cherchées que dans le voisinage de points singuliers essentiels, à condition d'approcher de ceux-ci par des chemins convenables. Elle est évidemment liée à celle des chemins d'infinitude. Dans les deux cas il s'en faut de beaucoup qu'on sache toujours trouver explicitement le fil d'Ariane mais il est déjà considérable qu'on puisse, quand il existe, s'assurer de cette existence. Quoiqu'il en soit, les problèmes ont pris une allure géométrique avec les morcellements de M. Montel et les suites de M. Julia. La représentation conforme peut alors jouer utilement pour passer des domaines cerclés à des domaines de forme quelconque.

Quant aux inégalités régissant les modes de croissance, elles gagnent, de plus en plus, en précision mais en conservant leur nature essentielle; c'est toujours la bonne vieille croissance exponentielle qui est la croissance type et l'on ne voit guère ce qui pourrait changer sur ce point.

L'exposition de M. Ostrowski paraît au courant d'une foule de travaux. Après les célèbres inégalités de Borel-Hadamard et les transformations de M. Lindelöf, on trouve l'influence de plus en plus récente de MM. P. Lévy, Valiron, Milloux. Beaucoup de noms français derrière celui de M. Emile Picard, ce qui n'interdit pas de trouver aussi ceux de MM. Bieberbach, Kœbe, H. Bohr, Landau. On ne peut empêcher le présent objet d'avoir soulevé des efforts vraiment universels et point n'est besoin d'être prophète pour annoncer qu'il en soulèvera d'autres grâce, pour l'instant, aux développements si intéressants que M. Ostrowski vient de lui consacrer.

A. Buhl (Toulouse).

Alfred Lacroix. — **Figures de Savants.** — Deux volumes gr. in-8°, l'un de x-328 pages et 32 portraits ou planches, l'autre de 360 pages et 26 portraits ou planches. Prix, pour l'ensemble des deux tomes: 150 francs. Gauthier-Villars & Cie. Paris, 1932.

Les savants dont il s'agit ici ne sont généralement point mathématiciens. Mais si nous avons attaché grande importance à des Eloges et Discours académiques publiés récemment par M. Emile Picard et concernant des géomètres, combien il paraîtrait injuste de ne pas paraître estimer autant une œuvre analogue due à l'autre Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences. De plus, n'envisagerait-on que les mathématiciens exclusivement préoccupés de l'esprit mathématique qu'il faudrait encore recommander à ceux-ci la lecture des deux magnifiques volumes dus à M. Alfred Lacroix. On voit mieux le rôle des mathématiques et on en comprend mieux la portée quand on est amené à réfléchir aux efforts d'esprits éminents, ayant voué un culte ardent à l'étude des phénomènes naturels mais voyant ceux-ci autrement qu'à travers les formules de l'algorithme géométrico-analytique.

Le Tome premier débute par l'histoire du Troisième fauteuil de la Section de Minéralogie de l'Académie des Sciences. Cette histoire commence avec Nicolas Desmarest (1725-1815) et se poursuit avec Guillot Duhamel, Brochant de Villiers, Armand Dufrénoy, Charles Sainte-Claire Deville, Edmond Hébert, Ernest Mallard, Paul Hautefeuille, Ernest Munier-Chalmas, Alfred Lacroix, Emile Haug, Lucien Cayeux. On voit que cette liste comprend M. Lacroix lui-même qui cessa, en 1914, d'occuper son fauteuil pour s'élever jusqu'au Secrétariat perpétuel. L'illustre Secrétaire ne nous a pas parlé de lui, ce qui était, sans doute, conforme au plan de son livre, mais cause une certaine déception parmi de sympathiques admirateurs qui auraient apprécié quelque originale autobiographie.

D'une manière générale, cette histoire d'un fauteuil unique montre la souplesse de l'esprit académique. Les travaux des savants élus sous une même étiquette furent extrêmement différents depuis le point de vue philosophique jusqu'au point de vue technique. La vie de certains se complique de politique ou atteste la révolte ouverte du savant contre le politicien (p. 61). Il y a aussi l'arséniosidérite de Dufrénoy que Tony Lacroix voulait appeler lamartinite en l'honneur de Lamartine. Voilà qui est encore dans la note de préoccupations généralement bien intentionnées mais contre lesquelles l'Institut doit résister. Le tome se termine avec Déoat Dolomieu, Le comte de Bournon, René-Just Haüy, Armand Lévy, François-Sulpice Beudant, Alfred Des Cloizeaux, Bory de Saint-Vincent. Ce dernier fit de la prison sans cesser de faire de la botanique.

Le Tome second est consacré à Alfred Grandidier, Alphonse Milne-Edwards, Jean-Baptiste Boussingault, Alexis Damour, Albert de Lapparent, Arnaud de Gramont, Auguste Michel-Lévy, Ferdinand Fouqué, Jérôme de Lalande, Louis Pasteur, Alfred Vulpian, Marcelin Berthelot.

Les anecdotes abondent. Alfred Grandidier fut l'homme de Madagascar; il est à peine besoin de dire que ses explorations rencontrèrent d'autres difficultés que celles du travail de laboratoire. Alphonse Milne-Edwards n'est pas précisément né dans le Jardin des Plantes, mais c'est tout comme. Il devait cependant s'évader quelque peu de cette atmosphère pour entreprendre d'admirables recherches sur la faune des grands fonds marins. Boussingault, mal jugé par Thénard, rejoint cependant celui-ci à l'Institut et Thénard s'excuse, regrette. Si j'avais su, dit-il. Le mariage d'Albert de Lapparent est plus que savoureux; Elie de Beaumont emmène le jeune ingénieur dans une galerie de l'Ecole des Mines et en termes froids, autoritaires, propres à un petit speech magistral, lui propose une union qui devait être et fut le bonheur. Belle page terminale sur de Lapparent vulgarisateur. Le talent du vulgarisateur est médiocrement apprécié par une Académie pour laquelle la recherche originale prime tout et cependant il y a des vulgarisateurs savants d'une valeur indéniable. De Lapparent était du nombre.

Michel-Lévy et Fouqué travaillent à la reproduction de roches volcaniques. Le second tempère l'enthousiasme du premier et parle de recommencer le travail.

Jérôme de Lalande apporte une note astronomique, donc mathématique. Euler influa directement sur lui. N'insistons pas sur les géants que furent Pasteur et Berthelot.

Le volume se termine avec un Appendice: Puys et Dômes de la Basse-Auvergne. L'auteur y développe des vues physico-géologiques effleurées dans de précédentes biographies. Les *nuées ardentes* de la Montagne Pelée fournissent matière à d'intéressants aperçus.

N'oublions pas les magnifiques planches de l'ouvrage. Elles nous donnent d'excellents, d'émouvants portraits et aussi des autographes qui, pour la plus grande partie, sont d'une écriture bien formée ou, tout au moins, très lisible. Chez des mathématiciens, une enquête graphologique analogue ne donnerait peut-être pas d'aussi bons résultats. Et comme pour corroborer cette opinion, il faut reconnaître qu'une lettre particulièrement mal écrite est de Jérôme de Lalande. Ce dernier a d'ailleurs mis les mots: Monsieur et cher Confrère, en évidence, comme il convient, mais à la fin de sa rédaction. Au début, rien.

Ces quelques citations, nous l'espérons, ne paraîtront pas sans charmes. Mais il faut se reporter à ces deux admirables volumes pour bien apprécier toutes les leçons et toute la sereine philosophie qui s'en dégage. Ils constituent vraiment une très belle et très grande histoire de la Science vue à travers la psychologie de ceux qui la font. A. Buhl (Toulouse).

E. Cartan. — **Leçons sur la Géométrie projective complexe** publiées d'après des Notes recueillies et rédigées par M. F. Marty (Cahiers scientifiques publiés sous la direction de M. Gaston Julia. Fascicule X). — Un vol. gr. in-8° de VIII-326 pages. Prix: 80 francs. Gauthier-Villars & Cie, Paris, 1931.

Cette Géométrie possède des traits essentiels qui remontent à von Staudt; elle comprend une géométrie *unitaire* que M. H. Weyl met à la base des recherches sur les groupes et la mécanique quantique. Elle se développe aussi avec le calcul des matrices selon d'élégants procédés dus, pour la plus grande partie, à Charles Hermite. M. Elie Cartan, en nous proposant de l'étudier sans nous écarter du point de vue géométrique, nous offre un terrain très fécond par lui-même et sur lequel on pourra également bâtir la Physique théorique des spectres révélant le monde sous-atomique.

Il fut un temps où les expressions « géométrie projective » et « géométrie métrique » semblaient s'exclure. Les prodigieux progrès dus à la notion l'espace de Riemann ont changé cet état de choses; il fallut seulement s'entendre sur la manière de généraliser les ds^2 tantôt susceptibles d'être conservés sous la forme pythagoricienne ou sous une forme analogue tantôt demandant à être étendus selon les idées hermitiennes par l'introduction de variables imaginaires conjuguées. C'est précisément parce que les préoccupations géométriques de l'heure présente sont toujours *métriques* en quelque manière qu'elles peuvent être, en même temps, *physiques*, la Physique étant, par excellence, une science de mesure, une science essentiellement métrique.

La Science de l'avenir est dans de telles remarques; ce qui serait extraordinaire, déconcertant au possible et même contraire au vulgaire bon sens, ce serait que la Physique, science essentiellement métrique comme nous venons de le dire, puisse s'élaborer indépendamment de l'évolution des métriques.

Revenons toutefois, d'une manière un peu plus précise, au bel ouvrage de M. Elie Cartan. Il ne s'agit que des transformations

$$x'_i = a_{ik} x_k \,, \qquad x'_i = a_{ik} \bar{x}_k \tag{1}$$

où l'x surmonté d'un tiret est imaginaire conjugué de x. L'ensemble de ces *homographies* ou *antihomographies* forme évidemment un groupe, mais quelle richesse dans celui-ci. Ainsi la droite complexe équivaut au plan de Cauchy. Des *antiinvolutions* conduisent déjà à des notions métriques car leur itération s'exprime par une expression exponentielle; au *produit* des transformations correspondent, en exposant, des propriétés additives qui sont celles appartenant aux *distances*.

Ecrire les variables, dans les transformations (1), est d'importance secondaire. L'essentiel est dans le tableau des coefficients, c'est-à-dire en des *matrices* dont le produit, en général, n'est pas commutatif. Il n'y a là aucune généralisation scabreuse; cette non-commutativité se retrouve partout comme accompagnant l'homogénéité, car les équations (1) sont homogènes. Si les transformations, sous la forme matricielle, peuvent être décomposées en facteurs matriciels plus simples, comme c'est déjà le cas pour les rotations euclidiennes, nous pénétrons l'essence, le substratum de ces transformations comme on pénètre la structure des nombres entiers ordinaires en les décomposant en facteurs premiers. Quelle belle justification de l'aphorisme qui veut que la découverte d'une harmonie numérique soit aussi importante que l'élaboration d'une cosmogonie.

On voit quel merveilleux instrument de synthèse et d'analyse est constitué par le groupe (1), ce que la première partie de l'ouvrage, consacré à la droite projective complexe, suffit à montrer. Mais les horizons s'élargissent encore et presque à perte de vue dans une deuxième partie consacrée à la géométrie projective complexe à plusieurs dimensions. C'est ici que l'espace riemannien prend de nombreuses propriétés de symétrie qu'on est loin de soupçonner si l'on s'en tient à sa définition générale. Entre cet espace général et l'espace euclidien ordinaire, les comparaisons sont lointaines. Que de détails riemanniens s'évanouissent dans la géométrie d'Euclide; ils se conservent mieux dans les cas intermédiaires des géométries hermitiennes elliptique ou hyperbolique et peuvent aussi correspondre à des géométries souvent étudiées à part telles celle du complexe linéaire ou celle des sphères orientées. C'est d'ailleurs la possibilité de l'insertion de ces géométries intermédiaires qui rattache à la Gravifique générale les théories quantiques ou, ce qui revient au même, la Mécanique ondulatoire. M. Elie Cartan ne s'est pas engagé dans ces considérations physiques proprement dites mais il a écrit un dernier chapitre qui permettrait facilement de raccorder son bel exposé avec ceux de Weyl ou de Wigner analysés plus haut (pp. 163-165). Certes les théories quantiques et ondulatoires sont d'un merveilleux intérêt mais, après avoir étudié l'exposé de M. Cartan, on peut se demander si presque tout cet intérêt ne vient pas de la Géométrie pure. A. Buhl (Toulouse).

Harris Hancock. — **Foundations of the Theory of Algebric Numbers.** — Volume I. Introduction to the general Theory. — Un volume in-8° de xxvii-602 pages. Prix: $8.00. The Macmillan Company, New-York, 1931.

Admirable ouvrage précédé d'une Introduction que j'ai d'abord eu envie de traduire purement et simplement. Je ne le ferai cependant pas; la critique bibliographique doit être plus originale mais c'est avec une satisfaction non dissimulée que je vois confirmer, une fois de plus, par un des maîtres de l'Analyse algébrique et de l'Arithmétique supérieure, les vues esthétiques et les aperçus philosophiques qui ont toujours été défendus ici. L'Arithmétique est un don divin (a divine gift) touchant à la Science d'un côté, à la Philosophie de l'autre; bien que la vérité semble souvent être un vain mot, c'est dans un tel domaine qu'on peut, le plus solidement, s'imaginer la voir et la saisir. D'autre part les harmonies numériques générales semblent bientôt prendre une valeur cosmologique s'accordant avec les grandioses théories tendant, telles celle d'Einstein, à peindre mathématiquement les traits essentiels de la Nature. Ce n'est pas moi qui introduis ici Einstein; c'est M. Harris Hancock (p. VIII). La discussion est portée à une hauteur qui impose le rapprochement. Les nombres algébriques, qu'on peut se représenter d'abord comme racines d'équations algébriques à une inconnue, appartiennent, plus généralement, à des courbes, à des surfaces, à des variétés algébriques. Et l'analyse des variétés algébriques ne va pas sans le même appareil analytique que celui qui est nécessaire aux développements électromagnétiques et gravifiques. L'Univers est Nombre, comme le voulait l'intuition hellène mais il faut savoir entendre le mot Nombre avec des généralisations, des ascensions successives qui laissent dans un monde vulgaire et singulièrement restreint les nombres seuls connus de beaucoup de praticiens, d'ailleurs non dénués de mérite. Le bel ouvrage de M. Hancock invite à ces ascensions successives et ce par des méthodes simplifiées, avec une foule d'énoncés sous lesquels on retrouve aisément les trames arithmétiques élémentaires. Les éléments qui constituent ces dernières trames vivent d'une vie nouvelle et d'abord insoupçonnée comme il arrive des éléments géométriques vulgaires lorsqu'on tente de les transporter dans des espaces de plus en plus complexes. On a souvent demandé s'il était loisible de construire des arithmétiques généralisées qui seraient à l'arithmétique ordinaire ce que les géométries non-euclidiennes sont à la géométrie d'Euclide. Or la Théorie des nombres algébriques répond, dans une large mesure, à cet esprit de curiosité. Et elle s'idéalise si bien que l'un de ses principaux concepts est celui de symboles qualifiés de symboles idéaux ou simplement d'*idéaux*. Ces idéaux interviennent surtout en matière de factorisation, celle-ci cessant d'être unique par l'adjonction de divers domaines de rationalité. Ainsi

$$21 = (5 + 2)(5 - 2) = \left(1 + 2\sqrt{-5}\right)\left(1 - 2\sqrt{-5}\right)$$

mais ce n'est là qu'une petite chose au delà de laquelle on peut attendre des développements plus grands encore que ceux associés aux imaginaires en i. L'exemple reproduit n'empêche nullement qu'il y ait une factorisation unique des idéaux par idéaux *premiers*. Fermat, Gauss, Wilson, par éclairs géniaux, utilisèrent cette merveilleuse souplesse de l'Arithmétique supérieure, d'où des théorèmes bien connus qui semblent prendre une place de plus en plus naturelle dans des exposés méthodiques tels que celui de M. Hancock. Faut-il mentionner aussi qu'il y a un algorithme d'Euclide sur la factorisation, que cette notion a eu des définitions imparfaites ou équivoques qui semblaient parfois opposer « divisible par » à « être contenu en ». Cela ne rappelle-t-il pas les produits matriciels à facteurs non commutatifs ? Des généralisations convenables, bien arrêtées aujourd'hui, ont définitivement apporté la lumière sur ces paradoxes ou ces prétendus paradoxes.

Voilà, au hasard, quelques points saillants d'un très beau volume qui contient des centaines d'autres points aussi intéressants. Les plus grands noms, Legendre, Dedekind, Kronecker, Jacobi, Kummer, Hermite, Poincaré, Klein, Dickson, Hilbert, Minkowski défilent, dans un éblouissement de prodiges, en quatorze chapitres qui aboutissent à une présentation géométrique des idéaux en des domaines imaginaires ou réels. Ce sont alors les idées de Klein et de Poincaré sur les groupes linéaires ou automorphes à domaines non-euclidiens. Et tout cela, répétons-le, est déduit du Nombre et de ces harmonies, de ces identités entre nombres dont la recherche et l'étude, tout en remontant à l'Antiquité, sont plus que jamais à poursuivre, toute notable découverte, dans cet ordre d'idées, valant, répétons-le, autant qu'une cosmogonie. A. Buhl (Toulouse).

Leon Lichtenstein. — **Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen nebst Anwendungen.** — Un vol. gr. in-8° de x-164 pages. Prix: Rm. 16,80. Julius Springer, Berlin, 1931.

Analyse d'approximations qui est bien dans la note de la science actuelle. La méthode variationnelle appliquée à des équations différentielles de première approximation, pour en atteindre une seconde, est aussi ancienne que la Mécanique céleste. Elle s'est précisée avec les équations aux variations dues à Henri Poincaré. Ici ce sont les équations intégrales ordinaires, complétées par un terme perturbateur (qui peut d'ailleurs dépendre de la fonction inconnue) qui prendront, ainsi complétées, une forme non linéaire pour laquelle on s'efforcera de faire varier les solutions classiques. Problèmes difficiles, résolus d'abord « en petit », c'est-à-dire quand le terme perturbateur est minime. Il faut aussi que ce terme ait des formes appropriées mais on constate bientôt que cette dernière condition, loin de diminuer l'intérêt est plutôt de nature à l'augmenter car la recherche des formes appropriées est d'une plasticité tout à fait remarquable. De plus, les théories possibles obtenues, ainsi qu'il arrive si souvent en Mathématiques, sont, comme on le voit au second chapitre, justement celles qui correspondent à d'importants problèmes posés par la Géométrie, la Mécanique et la Physique. Et M. Lichtenstein montre tout ceci avec beaucoup d'art et d'aisance, n'encadrant rien, qui ne paraisse très naturellement encadré. Les conditions d'analyticité, de régularité, de convergence uniforme suffisent à de délicates délimitations obtenues en des voies plus détournées par A. Liapounoff, E. Schmidt et quelques autres précurseurs. Les équations intégrodifférentielles non linéaires qui se laissent ramener à des équations intégrales également non linéaires (mais enfin qui ne sont qu'intégrales) donnent lieu à des considérations avoisinant les recherches de Liouville sur les équations du second ordre.

Les applications du chapitre II ont trait à la propagation d'ondes superficielles d'amplitude finie étudiés par M. Levi-Civita non sans contact avec des lemmes de M. Emile Picard. La théorie du rayonnement admet des rapprochements de même nature englobant des travaux de MM. Carleman, S. Bernstein, Nekrassow. Remarques analogues pour $\Delta z = F(x, y, z, p, q)$ avec questions aux limites y associées. A remarquer encore le cas où F est représenté par une intégrale triple de construction très symétrique, celui ou F ne contient ni p ni q et enfin l'équation $\Delta z = ke^z$ (Picard, Poincaré, Bieberbach, Le Roy, Bernstein...) sur laquelle M. Picard est précisément revenu dans le volume placé en tête de cette bibliographie.

Le chapitre III traite de quelques classes d'équations intégrodifférentielles qui ne se laissent pas ramener à des systèmes intégraux même non linéaires. Ces questions ont de profondes racines dans le passé avec les équations aux dérivées partielles du type elliptique, les surfaces minima et le problème de Plateau, l'équation de Lagrange provenant de la variation d'une intégrale double; elle se sont modernisées avec les travaux de M. Georges Giraud. Ce dernier et excellent géomètre vient d'ailleurs de reprendre dans les *Comptes rendus* (9 novembre 1931) des discussions manifestement en rapport avec les citations de M. Lichtenstein. L'impossibilité étudiée ici n'a cependant lieu qu'en général; elle laisse des cas accessibles aux méthodes du chapitre premier et il semble même que l'étude de ces cas particuliers puisse être indéfiniment poursuivie. La théorie de l'équilibre d'une masse fluide en rotation s'accomode d'une analyse maniable ainsi que diverses questions relatives aux fluides parfaits, questions dans lesquelles on retrouve des généralités appartenant aux mouvements tourbillonnaires.

Dans le Chapitre IV et dernier, l'étude des équations non linéaires « en grand » reprend, au fond, les travaux de Ritz et ceux plus récents de Kryloff, avec leurs intégrales multiples conditionnées par la fameuse inégalité de Schwarz. On étudie des équations asymptotiques aux équations intégrales. Tous ces domaines sont ardus et l'œuvre y trace comme un réseau de sentiers permettant de contempler de très près les difficultés fondamentales; quand les positions de celles-ci ne sont pas enlevées, il semble qu'elles soient toujours rétrécies en quelque chose, ce qui prouve, une fois de plus, que M. Lichtenstein est un excellent tacticien. Une dédicace nous rappelle aussi qu'il est l'ami de M. Emile Meyerson, ce qui fait très bien à côté de procédés d'exposition où l'approximatif joue un grand rôle, le rationalisme à propriétés universellement exactes et invariantes n'étant pas celui de la Nature.

A. BUHL (Toulouse).

Tullio LEVI-CIVITA. — **Caratteristiche dei Sistemi differenziali e Propagazione ondosa.** Lezioni raccolte dal Dott. G. Lampariello (Attualità Scientifiche, N. 41). — Un vol. in-8° de VIII-112 pages. Prix: L. 15. Nicola Zanichelli, Bologne, 1931.

Ce livre, simple et maniable, met au point une question apparue dans la Science avec Hugoniot, brillamment poursuivie par M. Jacques Hadamard et aboutissant actuellement à la Mécanique ondulatoire, à la lumière ondulée et photonique, aux travaux développés en France par le génie de M. Louis de Broglie. Un coup d'œil sur l'index placé à la fin du volume rappelle notamment Bateman, surtout Cauchy, Charpit, Darboux, Debye, Dirac, Einstein, Fermi, Fresnel, Goursat, Heisenberg, Jacobi, Janet, Maxwell, Pfaff, Planck, Riemann, Schrödinger, Volterra. Désordre alphabétique qui, cependant, rapproche toute la Physique théorique des équations aux dérivées partielles du second *et du premier* ordre. Car c'était véritablement un scandale de la Physique mathématique classique que de voir celle-ci ne reposer que sur des équations du second ordre; il restait à y incorporer l'équation de Jacobi, ce qui donna précisément naissance à la Mécanique des ondes.

Comme le fait expressément et excellemment remarquer M. Levi-Civita, la dualité des ondes et des corpuscules résulte de dualités analytiques fondamentales et simples, notamment de celle des *caractéristiques* et des *bicaractéristiques*. Ces notions ne sont pas nouvelles; il faut, pour la plus grande partie, les faire remonter à Cauchy. Une fois de plus, l'analyse abstraite aura pris, tout à coup, une signification phénoménale.

M. Levi-Civita est très large dans sa définition du mouvement ondulatoire. L'onde est la propagation d'une perturbation, parfois avec vitesse très grande, qui peut cependant ne dépendre que de petits mouvements, au sens qu'ont ces deux derniers mots dans la Mécanique classique. Autre raison pour profiter de Lagrange, d'Hamilton et de Jacobi dans les théories ondulatoires.

Les ondes ne vont pas sans conditions de compatibilité, les unes géométrico-cinématiques, les autres dynamiques. Ces dernières donnent des jeux d'opérateurs, notamment un déterminant qui, annulé, conduit à l'équation aux dérivées partielles des variétés caractéristiques. Signalons encore les impossibilités relatives aux fluides visqueux et le transport de la notion d'onde, par discontinuité transversale, dans la théorie de Maxwell. Certes l'optique ondulatoire et la théorie électromagnétique ont, depuis longtemps, des représentations d'ondes, généralement trigonométriques mais ce n'était pas sur de tels points qu'il y avait intérêt à revenir. Il fallait montrer plutôt comment l'onde discontinuité s'introduisait dans ces disciplines et c'est, au fond, fort simple, les équations générales de la dynamique des milieux continus étant de très proches parentes de celles de Maxwell. Il y a néanmoins de nombreuses questions à reprendre, telles celle de la surface des ondes de Fresnel, découverte en 1827, mais l'esprit si clair de l'auteur s'est partout tiré d'affaire avec une grande rapidité et une non moins grande élégance.

On retrouve aussi en cet exposé l'esprit qui caractérise la science actuelle bien faite. Aucune idée révolutionnaire, aucune déclaration sur quelque actuel bouleversement des notions d'autrefois; simplement de la généralisation harmonieuse semblant naturellement issue du labeur du passé, labeur absolument respecté en la personne de géants de la pensée tels Huyghens et Fresnel. On ne s'étonne d'ailleurs pas de voir professer dans de telles formes quand le professeur est M. Levi-Civita. A. Buhl (Toulouse).

A. J. McConnell. — **Applications of the Absolute Differential Calculus.** — Un volume gr. in-8° de XII-318 pages. Prix: 20 *s.* net. Blackie and Son limited, London and Glascow, 1931.

Nouvelle série d'ouvrages sur les Théories einsteiniennes ou sur les préliminaires permettant d'en approcher de la manière la plus naturelle du monde. Et c'est toujours ce naturel qui fait trouver si bizarre l'opposition rencontrée, au début et au sujet de ces théories, chez certains hommes de science. Comme Henri Poincaré aimait à le mettre en évidence, nous pensons en « groupes » et le Calcul différentiel absolu est particulièrement indiqué pour localiser une telle manière de penser. Ses notations s'emploient avec avantage dans les problèmes les plus élémentaires de l'Algèbre et, quand l'Algèbre sera communément enseignée dans cet ordre d'idées, les efforts à faire, pour assimiler la Gravifique proprement dite, apparaîtront comme bien minimes. Convient-il même de parler au futur; n'en sommes-nous pas déjà là. Quoiqu'il en soit, un livre comme celui-ci nous le ferait croire aisément.

La Première partie, après notations et définitions préliminaires, débute en somme par les déterminants. C'est là qu'est vraiment le secret du nouveau Calcul et ce à des points de vue très divers mais quiconque possède une bonne théorie visuelle des déterminants, y compris, bien entendu, les déterminants fonctionnels, semble autorisé à aller aussi loin qu'il est nécessaire dans les théories tensorielles et gravifiques.

La Seconde partie est consacrée à la Géométrie analytique du plan, de la droite, des cones, coniques et quadriques avec les pôles et polaires. Tout cela fait très bien en notations tensorielles, la convention de sommation jouant ici avec une simplicité éblouissante. Cette simplicité est aussi celle de la Théorie des formes mais nous avons présentement l'avantage de sentir, sous nos formules, une science pratique, déjà étudiée sous des aspects moins aisément prolongeables vers les développements physiques.

La Troisième partie nous amène à des conclusions complètement analogues en ce qui concerne la Géométrie différentielle, appliquée particulièrement aux surfaces. Ici apparaissent les symboles de Christoffel, le tenseur de Riemann-Christoffel, la géométrie intrinsèque sur une surface avec le parallélisme adéquat, les formes différentielles fondamentales et d'élégants développements sur les lignes géodésiques, les lignes de courbure, les asymptotiques, la courbure et la torsion géodésiques.

La Quatrième partie a trait aux applications mécaniques et physiques. Parmi celles-ci, il faut surtout remarquer une Géométrie de la dynamique où la notion de force vive fait introduire les ds^2 riemanniens que la Gravifique utilisera plus tard de façon plus profonde.

L'électricité et le magnétisme ne vont pas, évidemment, sans les formules de Green et de Stokes. Ici, je placerai volontiers une petite critique, déjà faite à propos d'autre ouvrages mais sur laquelle il faut revenir, je crois, sans se lasser.

L'ordinaire formule de Stokes (p. 258) est généralement développée sous une forme qui ne peut tenir en une ligne d'où une coupure typographique inesthétique. Pourquoi ne pas écrire

$$\int_{\mathrm{C}} \mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz = \iint_{\mathrm{S}} \begin{vmatrix} l & m & n \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \mathrm{P} & \mathrm{Q} & \mathrm{R} \end{vmatrix} d\sigma .$$

La raison typographique est d'ailleurs bien secondaire. Le déterminant symbolique ainsi introduit est le type de beaucoup d'autres conduisant, par exemple, à une forme généralisée des équations de Maxwell. Et c'est encore ici l'occasion de faire triompher les déterminants sur lesquels l'auteur insiste excellemment au début du volume.

Il va sans dire que le non emploi de la notation précédente n'empêche pas le Chapitre sur l'électromagnétisme d'être excellent.

Nous passons ensuite aux mouvements des milieux continus, à celui des fluides parfaits et visqueux. Le simple jeu des notations tensorielles mène aisément aux équations fondamentales.

Ce beau livre se termine avec les généralités gravifiques prises à partir de la Relativité restreinte. N'oublions pas l'Appendice sur les Coordonnées curvilignes orthogonales.

Le tout constitue vraiment un ouvrage de première importance présenté à peu près dans les mêmes formes matérielles que *The Absolute differential Calculus* de M. Tullio Levi-Civita mais plus élémentaire (voir *L'Enseignement mathématique*, t. 26, 1927, p. 152).

Nous avons maintenant le moyen d'aller vers M. Levi-Civita, vers M. Th. De Donder, vers Albert Einstein lui-même à partir d'un exposé habile qui contient les matières d'un cours de Mathématiques générales, ces dernières mathématiques ayant pris, elles-mêmes, les formes les plus propres à l'étude des préliminaires de la Physique théorique.

A. BUHL (Toulouse).

Tracy Yerkes THOMAS. — **The elementary Theory of Tensors** with applications to Geometry and Mechanics. — Un volume gr. in-8° de x-122 pages. Prix: 10 *s*. McGraw-Hill Publishing Co., Ltd. London. 1931.

Volume analogue au précédent, mais plus bref. Il s'agit toujours de faire du Calcul tensoriel à partir des principes mêmes des Mathématiques. Il est possible qu'on en arrive ainsi à changer l'enseignement élémentaire, du moins dans les pays de langue anglaise pourtant si traditionalistes. Il m'est pénible de constater que pas un ouvrage français ne semble s'associer au mouvement. Cela viendra, évidemment. Mais d'où nous vient, en attendant, cet esprit retardataire ?

Dans un chapitre de considérations préliminaires, l'auteur a surtout adjoint la notion de matrice à celle de déterminant. Cela permet d'aller loin. On peut considérer le déterminant comme absolument fondamental mais il correspond toujours à quelque système linéaire et les systèmes linéaires engendrent des groupes qui s'étudient, avec le maximum de commodité, sour la forme matricielle. Déterminants et matrices régissent maintenant Calcul tensoriel et Mécanique ondulatoire. Si l'étude de cette ramification n'est pas poussée ici très avant, du moins avons-nous rapidement une première indication de son existence.

Dans le Chapitre II, consacré aux tenseurs, il faut surtout relever un paragraphe sur les vieilles formules en notations nouvelles. C'est très simple; il s'agit de formules de différentiation, du théorème d'Euler sur les fonctions homogènes, de la résolution de systèmes linéaires; mais cette extrême simplicité commence précisément à mettre en relief les avantages du nouvel algorithme.

Le Chapitre III est consacré à la géométrie euclidienne considérée comme traduisant les propriétés de solides idéaux. Ici se place le Principe euclidien de Relativité. Tout ce qui se repère par rapport à de certains axes peut être repéré par rapport à d'autres. En des espaces plus généraux, ceci ne peut s'étendre qu'avec des précautions spéciales.

Quant au Principe de Relativité, tel qu'on l'entend ordinairement, avec signification cinématique, il apparaît tout naturellement dans le Chapitre IV consacré à la notion de mouvement.

Le Chapitre V et dernier traite de la dynamique de Newton. Cette dynamique s'accomode fort simplement de considérations tensorielles. Ce pourrait être ici le cas de rappeler l'opinion de M. Elie Cartan, d'après laquelle la loi de gravitation de Newton est faite avec des bribes dépendant de celle d'Einstein. Etudier d'abord ces bribes, avec l'esprit tensoriel, ne peut être qu'une bonne idée. Et tout ce livre repose encore sur d'autres idées tout aussi bonnes.

A. BUHL (Toulouse).

Harold JEFFREYS. — **Cartesian Tensors.** — Un volume in-8° de VIII-94 pages. Prix: 5 *s*. net. Cambridge. At the University Press. 1931.

Troisième terme de la série commencée avec les deux ouvrages précédents. Ce terme n'est pas moins remarquable, les trois étant simplement rangés d'après l'apparence *extérieure* des volumes, d'après les nombres de pages. En ajoutant le troisième ouvrage au second, on obtient, à peu près, les matières traitées dans le premier; les deux derniers auteurs se sont limités davantage mais ils ne limitent rien quant à un principe fondamental de tout point excellent. C'est toujours, dans les cas les plus simples, dans les cas cartésiens, l'usage de ce merveilleux Calcul tensoriel qui paraît marcher tout seul, dans les directions où il y a quelque chose à fonder, à trouver et ce presque uniquement par l'application de la convention de sommation.

Les préliminaires de ce troisième ouvrage sont encore riches en systèmes linéaires. La dynamique du point aboutit immédiatement aux équations de Lagrange et au Principe d'Hamilton; celle du solide livre le Principe des travaux virtuels, le Principe de d'Alembert, le *centroïde*. Les considérations statiques tiennent en cinq pages.

Les systèmes continus débutent naturellement par des transformations d'intégrales multiples, le point de vue dynamique pur et le point de vue électromagnétique étant encore immédiatement rapprochés.

Les tenseurs *isotropes*, ou invariants quant à des rotations d'axes, donnent d'intéressantes permutations d'indices. L'élasticité et l'hydrodynamique avec tenseurs symétriques et antisymétriques, sont encore très simplement développées en accord avec la dynamique du point.

Un exposé réduit n'est pas le moins probant quant à la haute valeur du Calcul tensoriel. Combien il est curieux de constater que, pour manier celui-ci dans les cas les plus simples, il a d'abord fallu commencer dans des hyperespaces fort complexes. Mais ne regrettons rien; soyons heureux, au contraire, en songeant à la prodigieuse économie de pensée que vont réaliser maintenant les jeunes générations. A. Buhl (Toulouse).

L. Hopf. — **Relativitätstheorie als verständliche Wissenschaft.** — Un volume petit in-8° cartonné de VIII-148 pages et 30 figures. Prix: RM. 4,80. Julius Springer, Berlin, 1931.

Joli petit volume comparable, à première vue, à ceux, très nombreux, qui furent publiés, sur le sujet, en toutes langues, il y a une quinzaine d'années, et qui avaient pour but de vulgariser les théories d'Einstein en n'ayant recours qu'au langage ordinaire ou seulement à quelques formules très élémentaires telles celles de la transformation de Lorentz. Tous ces petits ouvrages étaient pleins de bonnes intentions mais certains trahissaient plus d'enthousiasme que de véritable compréhension. On peut penser qu'il serait utile de les refaire maintenant avec les idées fondamentales si simples, si claires, qui président actuellement à l'élaboration de la Gravifique et qui étaient loin d'être aussi bien dégagées il y a quinze ans.

On peut admirer sans réserves les premières lignes de l'exposé. Elles font remarquer que la pensée systématique élargissant les cadres de la Physique n'a, pour ainsi dire, jamais fait d'aussi grands progrès que ceux qui proviennent de l'œuvre « titanesque » d'Albert Einstein.

Sans doute l'auteur est fier de son compatriote mais l'humanité entière peut s'enorgueillir, à tout aussi bon droit, d'avoir enfanté une telle intelligence. Citons également un passage excellent (p. 6) sur le caractère révolutionnaire de la théorie. L'apparition d'un tel caractère est une forme de l'incompréhension. Les mêmes préliminaires accordent une grande importance à Maxwell, intermédiaire génial entre Riemann et Einstein.

Suivant la coutume, il y a exposition successive de la Relavitié restreinte et de la Relativité généralisée. Pour la première, d'ingénieux croquis contractent des personnages et les entraînent dans des systèmes comparés de constitution très simple. Généralement ces personnages tiennent des montres et peuvent se convaincre aisément de la relativité de l'espace et du temps. Ici, il y avait aussi peu de place que possible pour l'originalité. Il n'en est pas de même quand il s'agit de la théorie générale avec phénomènes gravitationnels. L'auteur a bien fait ressortir le caractère *métrique* des nécessités physiques fondamentales et la nécessité, non moins grande, de suivre les préoccupations physiques avec des géométries *métriques* de plus en plus générales. Ceci fait définitivement justice d'une Gravifique qui serait une spéculation purement mathématique. Enfin l'ouvrage est dédié à M. Arnold Sommerfeld. Je pense qu'il s'agit du savant qui fit beaucoup pour le Calcul tensoriel vu à travers les intégrales multiples.

M. A. Sommerfeld ne vient-il pas, d'autre part, de faire, à Paris, à l'Institut Henri Poincaré, quelques brillantes conférences *Sur quelques problèmes de Mécanique ondulatoire*, conférences publiées dans les *Annales* de cet Institut (Vol. II, 1932, fasc. I). Réminiscence mathématique, auteur mathématicien et cependant ici œuvre attachante s'adressant à tout lecteur éclairé.

A. Buhl (Toulouse).

J. Wolff. — **Fourier'sche Reihen** mit Aufgaben. — Un fascicule cartonné de IV-60 pages. Prix: Fl. 2,40. P. Nordhoff, Groningen, 1931.

Les séries trigonométriques sont à l'ordre du jour. Nous avons récemment analysé (t. 29, 1930, p. 353) l'ouvrage étendu de H. S. Carslaw. N'oublions pas non plus le *Cours d'Analyse* professé à l'Ecole Polytechnique par M. J. Hadamard (*Ibid.*, t. 25, 1926, p. 144) ni celui de M. P. Lévy (*Ibid.*, t. 29, 1930, p. 175).

Après cela, il reste encore, très naturellement, de la place pour l'exposé de M. Wolff. Cet exposé est comme un riche Recueil d'exercices qu'on pourrait adjoindre heureusement à tout traité sur la matière. Il procède par théorèmes brefs suivis de démonstrations condensées et toujours nettement localisées, ce qui est une première analogie avec une réunion de problèmes. De plus, il renferme une quantité d'énoncés à travailler et tels qu'en les travaillant effectivement on puisse aboutir, à peu près, à la même connaissance du sujet que celle qui proviendrait d'un ouvrage beaucoup plus volumineux. On aura, de plus, la joie de l'effort fécond.

Les débuts invitent à réfléchir sur la notion d'intégrale. Il est même indiqué brièvement comment l'intégrable procède du mesurable. Les travaux de M. Lebesgue sont effleurés. Dans les exercices terminaux, on trouve des identités peu connues dues à Gauss et à Poisson. Les formules intégrales à propriétés limites jouent partout un grand rôle. La plaquette a certainement été écrite dans un but pédagogique pratique; une courte préface indique même comment les élèves doivent l'utiliser; mais nous croyons aussi que les mathématiciens, dominant déjà les séries de Fourier, peuvent trouver à glaner, dans ces soixante pages, des choses fort intéressantes.

A. Buhl (Toulouse).

N. Saltykow. — **Méthodes classiques d'intégration des Équations aux dérivées partielles du premier ordre** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. L). — Un fascicule gr. in-8° de 72 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars & Cie, Paris, 1931.

Le présent travail, passant en revue la théorie classique, met en relief l'idée fondamentale de cette dernière et donne l'extension du problème de l'intégration. Il se présente en même temps l'occasion de préciser et de mettre au point bien des passages délicats. Les recherches historiques et critiques, subissent, de même, les corrections nécessaires.

Les traités modernes sont influencés par les importants travaux de S. Lie. Etant très originales, ces dernières recherches semblaient néanmoins occuper une place à part. Or, les résultats de S. Lie sont soumis, ici, à une étude approfondie, afin d'être étroitement liés aux recherches des époques antérieures. Il s'établit, de cette manière, une correspondance intime entre les idées et les nouvelles notions de S. Lie, d'une part, et les travaux classiques sur les équations aux dérivées partielles, d'autre part.

Ainsi, la doctrine se présente sous la forme d'un ensemble bien uni. La théorie exposée est dominée par une idée générale d'intégration que l'on voit se développer depuis la naissance du problème jusqu'à nos jours. Toutes les recherches sont considérées au point de vue de l'évolution de la même méthode générale d'intégration.

Grâce à cette manière d'exposer, la théorie des équations étudiées gagne en simplicité et en clarté. La distinction indiquée se manifeste d'autant plus que les théorèmes, qui s'interposent, sont démontrés par un calcul immédiat fondé sur les propriétés élémentaires des équations canoniques aux différentielles ordinaires. De cette manière sont traités tous les problèmes compliqués, comme ceux d'exception dans les théories de Cauchy et de Jacobi sur les caractéristiques, les intégrales de S. Lie et le perfectionnement des méthodes de S. Lie et A. Mayer. Tous ces problèmes s'unissent aux recherches classiques de Jacobi, de Liouville et de leurs disciples.

Pour traiter les systèmes d'équations simultanées, la théorie des équations canoniques ordinaires est étendue vers les équations aux différentielles totales et vers les équations des caractéristiques dans le cas de plusieurs fonctions inconnues. Ces dernières généralisent les équations que Charpit avait introduites et que l'on attribuait ordinairement à Jacobi.

Cela étant, la simplicité s'accroît, du fait de traiter, soit une équation, soit un système.

Enfin, la méthode servira encore de base pour étudier, dans un nouveau fascicule, d'autres méthodes modernes d'intégration.

Le nouveau fascicule sera étudié ici lors de sa publication. Mais nous pouvons déjà dire qu'il est d'accord avec l'heureuse découverte du Mémoire de Charpit, découverte faite par MM. E. Picard et H. Villat. On y parlera des équations à n variables, des équations linéaires simultanées, méthode Korkine-Lindelöf, des *fonctions caractéristiques*, dans leurs rapports avec les équations canoniques, de théories de Liouville toujours exposées jusqu'ici de façon imparfaite.

On voit que l'esprit de synthèse est développé chez M. Saltykow. Mais on sait que, depuis un tiers de siècle, il est un des plus hardis pionniers du sujet et qu'il a, dans ces dernières années, publié d'admirables cours professés en Belgique. C'est vraiment une bonne fortune que de rencontrer un tel guide.

A. Buhl (Toulouse).

Erwand Kogbetliantz. — **Sommation des Séries et Intégrales divergentes par les moyennes arithmétiques et typiques** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. LI). — Un fascicule gr. in-8° de 84 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars & Cie, Paris, 1931.

M. Kogbetliantz a l'amabilité, tout au début du présent fascicule, de rappeler celui que j'ai consacré, dans le même « Mémorial » et sous le numéro VII, à la sommabilité analytique dont il se voit ainsi dispensé de s'occuper profondément. Les méthodes de prolongement analytique ont, en effet, avec Mittag-Leffler et M. Emile Borel, eu recours, fort largement, aux sommations par moyennes mais ces sommations, considérées en elles-mêmes et appliquées aux séries les plus quelconques, ont une généralité qui laisse, loin derrière elle, les méthodes du domaine taylorien prolongé.

Les séries divergentes, invention du diable d'après Abel, perdent une grande partie de leur caractère diabolique quand on les observe à la lumière des critères de *régularité* et de *permanence ;* les *limites généralisées*, quand la généralisation sera convenable, pourront encore se prêter à des calculs de limites ordinaires. On est ainsi beaucoup plus souvent en présence de méthodes d'extension que de procédés absolument nouveaux. Et ceci porte à penser, avec une assez forte dose peut-être d'appréciation personnelle, que la théorie des séries (ou intégrales) divergentes mais sommables est l'une des parties les plus facilement accessibles de la moderne Théorie des Fonctions; en feuilletant le beau fascicule de M. Kogbetliantz, cette opinion se renforce encore.

L'auteur, dans deux derniers chapitres, se rapproche habilement de questions et de séries connues. Il distingue entre la *puissance* et la *finesse* d'un procédé de sommation. Puis, sans reprendre absolument pour eux-mêmes des problèmes analytiques, il indique cependant comment les séries de Taylor ont profité des méthodes de sommabilité. C'est ensuite le tour des séries trigonométriques et des séries de Dirichlet. Le fameux phénomène de Gibbs peut s'approfondir ici de manière particulièrement pénétrante. Les séries sphériques de Laplace, avec le phénomène de Darboux, offrent des subtilités plus curieuses encore.

La bibliographie du sujet est arrêtée au premier janvier 1930; elle ne comprend pas moins de 99 noms dont beaucoup correspondent à une liste de Mémoires. Parmi les noms à liste particulièrement étendue, citons Fejér, Hardy, Littlewood, Knopp, Kogbetliantz, Landau, Moore, Obrechkoff, Riesz, Young, Zygmund. Le sujet paraît maintenant immense mais il vient d'être résumé avec beaucoup d'art et d'habileté.

A. Buhl (Toulouse).

B. Hostinsky. — **Méthodes générales du Calcul des Probabilités** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. LII). — Un fascicule gr. in-8° de 66 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars & Cie, Paris, 1931.

Ce fascicule examine surtout des questions de principes, avec nombreuses images à l'appui, mais enfin des questions de principes faisant comprendre pourquoi le Calcul des Probabilités équivaut aux grandes disciplines physiques et mathématiques qui, à l'heure actuelle, tendent à englober la Science. Les deux bases fondamentales de ce Calcul sont l'une un lemme d'addition, l'autre un lemme de multiplication. Le calcul tensoriel a des bases analogues. Les lois de probabilités peuvent dépendre de fonctions arbitraires qui s'éliminent avec un nombre suffisamment grand d'épreuves d'où notamment des intégrales multiples à propriétés invariantes. Des conceptions telles celle des *chaînes* de Markoff entraînent une analyse de déterminants qui, dans le cas des variables continues, s'allie aisément avec les équations intégrales à la Fredholm. Il y a d'ailleurs des manières extrêmement variées de faire augmenter le nombre des épreuves. Le premier aspect de la question est itératif et peut faire naître une infinité de problèmes d'itération à cas limites relativement simples. Ici le bon sens tire souvent, de préliminaires complexes, des résultats intuitifs dont la démonstration rigoureuse exige un appareil analytique considérable dans lequel se dessinent toutefois des lignes théoriques qui seront, sans doute, toujours renouvelables, exactement comme le sont les images géométriques ou mécaniques tentant de représenter la structure des phénomènes physiques. C'est depuis que le Calcul des Probabilités en est là qu'il prend figure d'une très grande chose. Henri Poincaré nous l'a montré et, de plus, il semble que la tournure d'esprit des savants de l'Europe orientale ait porté ceux-ci à perfectionner l'analyse du hasard par des moyens profonds et ingénieux. L'auteur qui semble le plus souvent cité dans ce fascicule est Markoff; il fut précédé par Tchébycheff.

Les phénomènes liés en chaînes n'ont jamais été mieux... enchaînés; M. Hostinsky les a repris sur d'élégants exemples. Les auteurs français, tels MM. Borel, Hadamard, Fréchet, ne sont pas oubliés mais il nous manquait un résumé des grands et beaux efforts dûs aux cerveaux russes, polonais, tchèques. Nous l'avons maintenant clair et précis.

A. Buhl (Toulouse).

Henri Vogt et Paul Mentré. — **Eléments de Mathématiques supérieures. Mécanique.** A l'usage des Candidats au Certificat de Mathématiques générales et des Ingénieurs. — Un volume gr. in-8° de VIII-216 pages et 90 figures. Prix: 20 francs. Vuibert, Paris, 1931.

Qui ne connaît les *Eléments de Mathématiques supérieures* publiés par Henri Vogt ? L'ouvrage en est aujourd'hui à sa treizième édition ! Les exercices proposés en ce si remarquable exposé sont traités en un Recueil qui en est à la quatrième. Henri Vogt songeait, depuis longtemps, à une exposition complémentaire de la Mécanique. La mort ne lui a pas permis de mener ce projet jusqu'à une complète exécution qui cependant est maintenant réalisée grâce au concours de M. Paul Mentré. Ce dernier s'attribue un rôle modeste. Presque tout, d'après lui, était rédigé par Vogt; il n'aurait eu que bien peu de chose à faire pour compléter. De fait, il est malaisé de distinguer, en ce beau livre, ce qui appartient à l'un et à l'autre. Les deux auteurs sont des esprits également clairs; le second, particulièrement géométrisant, auteur de théories intuitives concernant complexes et congruences, n'a probablement pas glissé sur la partie vectorielle de la Mécanique, même en supposant celle-ci rédigée au net, sans y apporter d'élégantes simplifications. Cette opinion, émise ici à tout hasard, paraît corroborée par un Appendice, dû à M. Mentré seul, où celui-ci donne, en six pages, non pas un résumé plus ou moins adroit des formules de la Mécanique, mais vraiment, sous un volume étonnamment réduit, la substance même de la science de l'équilibre et du mouvement.

Il est à peine besoin de dire qu'en faisant rentrer la Mécanique dans un programme de Mathématiques générales, ni Vogt ni M. Paul Mentré n'étaient capables de l'abaisser. Partout, par le principe des travaux virtuels, par la méthode de d'Alembert, par l'esquisse des méthodes s'appliquant aux mouvements les plus généraux des solides, par un dernier chapitre sur les chocs et percussions, les auteurs ont incité à l'étude d'une Mécanique plus savante, telle celle du grand *Traité* de Paul Appell.

Le volume est terminé par 99 exercices tous en rapport étroit avec les différents chapitres. Un tel instrument de travail est aussi complet que simple; il est un peu étonnant que Vogt ne l'ait pas réalisé depuis longtemps mais nous ne saurions nous plaindre d'un retard aboutissant à la collaboration de M. Paul Mentré. A. Buhl (Toulouse).

E. Lainé. — **Exercices de Calcul différentiel et intégral.** — Un vol. gr. in-8° de iv-146 pages. Prix: 20 francs. Vuibert, Paris, 1931.

Nous avons déjà dit (T. XXVI, 1927, pp. 153 et 330), tout le bien que nous pensions du *Précis d'Analyse* publié par M. E. Lainé à l'usage des candidats au certificat de Calcul différentiel et intégral. Cet ouvrage en deux volumes est maintenant complété par un Recueil d'exercices s'adressant tout naturellement aux mêmes candidats. Les énoncés ne sont point quelconques; ce sont ceux proposés à la Sorbonne à partir de 1920. On a ainsi une collection de 61 problèmes qui ne peuvent évidemment être analysés en détail, mais qui, outre qu'ils sont choisis par des maîtres de la Science, sont traités ici avec beaucoup d'art. Les méthodes de Cauchy sont toujours appliquées sur des figures montrant nettement les contours d'intégration; les intégrales complètes des équations non linéaires en x, y, z, p, q sont construites avec un à-propos que l'écriture machinale du système différentiel caractéristique ne révèle pas toujours. Et cependant l'esprit méthodique général n'est nullement méconnu comme en fait foi une table analytique placée à la fin du livre, table qui non seulement permet de se diriger vers une forme de question déterminée, mais rappelle très heureusement et très brièvement l'ensemble des sujets dont on doit avoir une certaine connaissance pour aborder l'examen. Cette table est comme le programme du certificat désiré mais c'est alors un programme dont chaque rubrique est immédiatement complétée par les matériaux nécessaires au travail de préparation. Un élève isolé n'ayant entre les mains que le *Précis* de M. Lainé et les présents *Exercices* peut travailler avec confiance.

A. Buhl (Toulouse).

J. Dollon. — **Problèmes d'Agrégation** (Mathématiques élémentaires). — Un vol. in-8° de viii-96 pages et de nombreuses figures. Prix: 15 francs. Vuibert, Paris, 1931.

Ceci n'est pas une collection quelconque de problèmes. Il y a là de très belles leçons de Mathématiques élémentaires faites à propos d'Agrégation. Ainsi quoiqu'il s'agisse des concours allant de 1905 à 1930, ceux de 1908, 1910 et 1913 ont été laissés de côté, les énoncés correspondants ne donnant lieu à aucune difficulté spéciale. La Géométrie domine avec maints caractères modernes comme, par exemple, dans le problème de 1906 où de multiples combinaisons de doubles signes ne se classent commodément qu'avec des procédés empruntés à MM. Bouligand et Rabaté (*Initiation aux méthodes vectorielles*).

L'Arithmétique et la Théorie des Nombres apparaissent en 1926, provoquant d'ailleurs dans les *Nouvelles Annales* d'intéressants développements de MM. Elie Cartan et Bertrand Gambier.

Le problème de 1929 rompt avec le classicisme euclidien, glisse du côté des groupes automorphes, fait naître une équation fonctionnelle et généralise les mots distance, déplacement, droite, circonférence. Ceci nous renvoie aux *Leçons sur quelques équations fonctionnelles* de M. Emile Picard, à la *Géométrie des Espaces de Riemann* de M. Elie Cartan et encore à la *Géométrie vectorielle* de M. G. Bouligand. De même, le problème de 1930 est prétexte à remarques très synthétiques de MM. Gambier et Lainé.

A tout ceci, il faut, bien entendu, ajouter les nombreuses élégances de la géométrie euclidienne considérée sous l'aspect... euclidien, si bien que le livre de M. Dollon permet de passer de cet aspect souvent hérissé d'obstacles aussi terribles qu'artificiels aux généralisations à la fois plus grandioses et plus méthodiques. A. BUHL (Toulouse).

Ch. FABRY. — **Cours de Physique** (Cours de l'Ecole Polytechnique), Tome I^er^. — Un vol. in-4° de 660 p., avec 339 fig.; 150 fr.; Gauthier-Villars & C^ie^, Paris.

Ce Tome Ier est divisé en trois parties: I. Thermodynamique. — II. Mouvements vibratoires. Acoustique. — III. Electricité.

Dan sa *Préface*, l'auteur indique le point de vue auquel il s'est placé en rédigeant ces leçons. En voici un extrait:

« L'enseignement de la Physique à l'Ecole Polytechnique s'adresse à des élèves qui ont déjà une bonne formation mathématique mais qui, en entrant à l'Ecole, n'ont en Physique que des notions élémentaires assez disparates; cet enseignement comprend 60 leçons réparties sur les deux années d'études. Il ne faut donc pas songer à donner à ces élèves un enseignement encyclopédique. D'ailleurs, dans l'état actuel de la science, quel professeur serait capable de faire un cours de Physique comprenant tout ce que l'on sait, et quels élèves seraient capables de s'assimiler un tel cours ? »

« Dans l'immense ensemble de la Physique il faut donc faire un choix. Théoriquement, le choix est fait par le programme de l'enseignement à l'Ecole; en réalité, ce programme est un cadre dans lequel ont peut mettre à peu près ce qu'on veut, en donnant une importance très inégale aux diverses questions. Le choix est, en réalité, déterminé par le but que l'on fixe à l'enseignement. »

« Ceci nous amène à l'importante question: Quel doit être le but de l'enseignement de la Physique à l'Ecole Polytechnique ? La plupart des élèves deviendront des ingénieurs, des techniciens, des applicateurs plutôt que des savants purs; c'est à cette grande majorité que l'enseignement doit tout d'abord s'adresser. Que leur faut-il ? D'abord une connaissance des phénomènes dont ils auront à se servir et des lois qui les régissent. Ensuite et surtout, l'habitude de raisonner non sur des abstractions mais sur des réalités, de ne jamais perdre de vue ces réalités dans les calculs les plus compliqués, de pousser les solutions *jusqu'au bout*, jusqu'au résultat numérique; il faut leur donner une notion de l'ordre de grandeur des phénomènes et le respect du nombre, ainsi que le sens de l'approximation. L'enseignement de la Physique peut et doit développer ces qualités de l'esprit.

Et si, comme on doit l'espérer, quelques-uns des élèves montrent du goût pour la recherche désintéressée et deviennent des savants, le contact intime avec les réalités aura été pour eux la meilleure des formations. »

« Toutes ces raisons conduisent à donner la place essentielle aux parties les plus solides de la Physique, à celles qui prennent le plus directement contact avec les réalités, et cela même aux dépens des parties les plus intéressantes, les plus hautement philosophiques des théories modernes. Ces considérations expliquent pourquoi une faible place est faite dans mon cours à ces théories. Le jour où l'on trouvera nécessaire de les introduire dans l'enseignement de l'Ecole, je pense qu'il faudra confier cet enseignement à un mathématicien, et qu'il pourrait utilement prendre la place des parties les moins importantes de certains autres cours. »

James JEANS. — **Les étoiles dans leurs courses.** — Traduit de l'anglais par A. SALLIN. — Un vol. in-8° de 205 pages avec un frontispice, 46 belles planches hors texte et 2 cartes du ciel; broché, 35 fr.; Hermann & Cie, Paris, 1932.

Par ses conférences, ses causeries à la T.S.F. et ses ouvrages de vulgarisation, Sir James Jeans a su intéresser ses compatriotes à l'étude si captivante de l'astronomie moderne. Grâce à la traduction que la librairie Hermann vient de publier, ses causeries sont accessibles aux lecteurs de langue française. Après le volume consacré aux *Mystères de l'Univers*, la librairie Hermann nous donne les *Etoiles dans leurs courses*. C'est une introduction à la fois facile et agréable aux théories modernes de « la plus poétique des sciences », selon l'expression de l'auteur. Accessibles aux élèves de l'Ecole secondaire, ces entretiens traitent des sujets suivants:

La voûte céleste. — Voyage préliminaire à travers l'espace et le temps. — La famille du soleil. — Poids et dimensions des étoiles. — La variété des étoiles. — La voie lactée. — Dans les profondeurs de l'espace. — Le grand Univers.

Appendice. — Le Guide du ciel. — Les vingt plus brillantes étoiles en apparence. — Les planètes. — Le mouvement des planètes.

Robert HENSELING. — **Neue Stereoskopbilder vom Sternhimmel.** I. *Der Mond.* — II. *Das Sonnensystem.* — III. *Sterne u. Nebel.* — Chaque série, RM. 8.—; Johan Ambrosius Barth, Leipzig, 1931.

Si des ouvrages tels que celui de Sir James Jeans sont de nature à intéresser le public cultivé au grand problème de l'astronomie, cet intérêt est encore stimulé lorsque, faute de lunette astronomique, on a recours aux vues stéréoscopiques. La collection que l'on doit à M. Robert Henseling facilitera cette première initiation. Elle comprend trois séries de 12 vues accompagnées d'un texte explicatif pour chacune des images. Elles sont consacrées: I. à la lune, II. au système solaire, III. aux étoiles et aux nébuleuses.

Nous avons déjà eu l'occasion de signaler les applications scientifiques et didactiques du stéréoscope. Cette nouvelle série sera bien accueillie, non seulement par les professeurs de l'enseignement secondaire, mais aussi par le grand public.

H. F.

The National Council of Teachers of Mathematics. The fifth Yearbook (1930) *The Teaching of Geometry.* — Un vol. in-8° de 206 pages avec 4 fig. The Seventh Yearbook (1932). *The Teaching of Algebra.* — Un vol. in-8° de 179 pages, avec 25 fig.; 1 doll. 75 le volume; Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University, New York City.

Depuis 1926, le Conseil National des Professeurs de Mathématiques des Etats-Unis publie chaque année un volume consacré à des questions d'enseignement scientifique. Dans notre dernier fascicule nous avons rendu compte du volume VI contenant une série de notes sur les mathématiques dans la vie moderne. Les volumes V et VII traitent de l'enseignement de l'algèbre et de la géométrie. Ils contiennent une série de notes dans lesquelles les auteurs abordent les divers problèmes qui intéressent les professeurs de l'enseignement secondaire, questions théoriques ou questions d'ordre didactique. Elles donnent une image des tendances actuelles, permettent aux maîtres de faire part de leurs expériences personnelles et par cela même stimulent la discussion dans les réunions de professeurs.

The Teaching of Algebra: I. Recent and Present Tendencies in the Teaching of Algebra in the High Schools, by J. Jablonower. — II. Algebra and Mental Perspective, by. J. P. Everett. — III. The Function Concept in Elementary Algebra, by N. J. Lennes. — IV. The Function Concept and Graphical Methods in Statistics and Economics, by W. Lietzmann. — V. Measuring the Development of Functional Thinking in Algebra, by E. R. Breslich. — VI. Mathematics and Measuring of World Trends and Forces, by W. S. Schlauch. — VII et VIII. Adventures in Algebra, by H. M. Walker and V. Sanford. — IX. Present Opportunities in Junior High School Algebra, by H. C. Barber. — X. Methods of Teaching Verbal Problems, by J. A. Nyberg.

The Teaching of Geometry; I. The Teaching of Geometry, by W. D. Reeve. — II. What Shall We Teach in Geometry ? by W. R. Longley. — III. Demonstrative Geometry in the Seventh and Eighth Years, by V. Sanford. — IV. and V. A Unit of Demonstrative Geometry for the Ninth Year, by J. B. Orleans and J. Seidlin. — VI. Teaching Plane and Solid Geometry Simultaneously, by M. L. Wilt. — VII. An Experiment in Redistribution of Material for High School Geometry, by G. E. Allen. — VIII. A New Approach to Elementary Geometry, by. G. D. Birkhoff and R. Beatley. — IX. Graphic Methods of Teaching Congruences in Geometry, by J. A. Swenson. — X. The Use of Indirect Proof in Geometry and in Life, by C. B. Upton. — XI. The Analytic Method in the Teaching of Geometry, by W. S. Schlauch. — XII. Symmetry, by J. W. Young. — XIII. The Transfer of Training, with Particular Reference to Geometry, by W. Betz. — XIV. Some Desirable Characteristics in a Modern Plane Geometry Text, by L. E. Mensenkamp.

R. de Montessus de Ballore. — **Index Generalis** 1932. — Un vol. in-8° relié de 2350 pages; 225 fr.; Editions Spes, rue Soufflot, 17, Paris.

Cet important ouvrage, qui paraît tous les ans depuis 1919, décrit 1100 universités et grandes écoles, 315 observatoires astronomiques, 150 offices météorologiques, 3000 bibliothèques, 600 instituts scientifiques, 250 laboratoires, 1150 académies et sociétés savantes du monde entier. L'ouvrage contient 2350 pages, 4.000.000 de caractères, une table alphabétique de 75.000 noms de personnes appartenant à l'élite intellectuelle de tous les pays.

Les 6.000 notices sont en langue allemande, anglaise, française, espagnole, italienne, latine, portugaise, selon les pays auxquels elles se rapportent.

L'*Index generalis* est un admirable instrument d'information pour les intellectuels et pour toutes les personnes qui, à un titre quelconque, sont en relation avec les intellectuels; il est constamment remis à jour par les chefs de service des organismes qu'il décrit et l'année de la mise à jour est indiquée pour chaque notice.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Livres nouveaux :

Atti del Congresso internazionale dei Matematici. Bologna, 3-10 Settembre 1928 (VI). Tomo IV. Communicazioni, Sezione IIA et IIB. — Tomo V, Sezione III (A, B), IV (B). — Deux vol. de 429 et 494 pages, avec de nombreuses figures. Nicola Zanichelli, Bologne.

The American School and University. A Yearbook devoted to the design, construction, equipment, utilization and maintenance of educational buildings and grounds. 1931-1932. Fourth annual edition. — Un vol. gr. in-8° de 558 p. avec de nombreuses illustrations. Published by the American School Publishing Corporation, New-York.

Conférences d'actualités scientifiques et industrielles faites au Conservatoire national des Arts et Métiers:

M. A. Pérard. — **La haute précision des mesures de longueur au laboratoire et dans l'industrie.** — Un fasc. in-8° de 31 pages et 14 fig. 5 fr.

P. Auger. — **L'effet photo-électrique des rayons X dans les gaz.** — Un fasc. in-8° de 27 pages avec 14 figures. 5 fr.

Fr. Perrin. — **Fluorescence, durée élémentaire d'émission lumineuse.** — Un fasc. in-8° de 44 p. 5 fr.

M. de Broglie. — **Les récents progrès de la désintégration artificielle des éléments par bombardement de rayons alpha.** — Un fasc. in-8° de 32 p. avec 19 fig. 5 fr.

M. J.-J. Trillat. — **Les applications des rayons X à l'étude des composés organiques.** — Un fasc. in-8° de 22 pages avec 9 figures. 5 fr.

M. J.-J. Trillat. — **L'état liquide et les états mésomorphes.** — Un fasc. in-8° de 24 pages avec 12 figures. 5 fr.

Ph. le Corbeiller. — **Les systèmes autoentretenus et les oscillations de relaxation.** — Un fasc. in-8° de 46 pages, avec 37 figures. 8 fr.

F. Bedeau. — **Le quartz piézo-électrique, ses applications à la T.S.F.** — Un fasc. in-8° de 31 pages, avec 21 figures. 5 fr.