Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 30 (1931)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: MOUVEMENT BINORMAL
Autor: Devisme, Jacques
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23884

MOUVEMENT BINORMAL

PAR

Jacques Devisme (Le Hâvre).

Dans une précédente note [1], M. Letterio Toscano a étudié le mouvement normal d'un point; peut-on plus particulièrement trouver des mouvements normaux par rapport à plusieurs centres ?

Prenons le cas de deux centres distincts O et Ω, l'accélération du point M doit être, à chaque instant, perpendiculaire aux droites OM et ΩM, donc au plan OMΩ; elle est en particulier orthogonale à l'axe OΩ, ce qui nous permet d'énoncer les résultats suivants:

Si un mouvement est normal par rapport à deux points de l'espace il est normal pour tous les points de la droite déterminée par les deux premiers points.

La projection sur un plan perpendiculaire à l'axe est un mouvement normal par rapport à la trace de l'axe sur le plan.

La projection sur l'axe est un mouvement uniforme.

De ces deux dernières propriétés on déduit finalement que:

Tout mouvement binormal est la composition d'un mouvement normal plan et d'un mouvement rectiligne uniforme perpendiculaire au plan. Le mouvement obtenu est normal par rapport à tout point de la perpendiculaire au plan élevée du centre du premier mouvement.

Aux exemples de M. Toscano nous pourrons ainsi faire correspondre des exemples spatiaux de mouvements binormaux

---

[1] *Enseignement Mathématique*, 29^{me} année, page 81.

pour les courbes dont les équations en coordonnées cylindriques sont

$$\rho = \rho(\theta) \, , \qquad z = kt \, .$$

Si nous remarquons que toute courbe peut être considérée comme tracée sur un cylindre ayant comme direction de génératrices la droite $O\Omega$ il se pose immédiatement le problème suivant: *Quelle sont les hélices susceptibles d'être parcourues d'un mouvement binormal* ? Cela revient à déterminer la section droite par la condition qu'elle puisse être parcourue d'un mouvement qui soit à la fois normal par rapport au centre des coordonnées polaires et uniforme.

Soit a la vitesse constante, on a la condition

$$\frac{d^2 r^2}{dt^2} = 2a^2 \, ,$$

d'où

$$r^2 = a^2 t^2 + bt + c \, ;$$

mais d'autre part on sait que

$$r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{d^2 r}{dt^2} \, ;$$

on a donc

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{r}\left[\frac{d^2 r}{dt^2}\right] = \frac{1}{r}\left[\frac{a^2}{r} - \frac{(2a^2 t + b)^2}{4r^3}\right]$$

ou

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{(4a^2 c - b^2)}{4(a^2 t^2 + bt + c)^2} \, .$$

Ainsi la section droite est déterminée par les équations paramétriques

$$\left\{ \begin{aligned} r &= \varepsilon \sqrt{a^2 t^2 + bt + c} \, , \\ \theta &= \frac{\varepsilon'}{2} \int \frac{\sqrt{4a^2 c - b^2} . dt}{a^2 t^2 + bt + c} \, . \end{aligned} \right. \qquad \varepsilon^2 = \varepsilon'^2 = 1$$

Nous terminerons en faisant quelques remarques relatives au mouvement normal plan [1].

---

[1] Il est clair qu'il ne peut pas exister de mouvement trinormal dans l'espace à trois dimensions.

I. *Existe-t-il des courbes qu'on ne puisse pas décrire d'un mouvement normal par rapport à un point de leur plan donné* a priori ?

On peut écrire la condition $Wr = 0$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \left[\frac{d^2 r}{d\theta^2} - r\right]\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{dr}{d\theta}\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0\ . \qquad (1)$$

Le mouvement ne peut avoir lieu que si $\frac{d\theta}{dt} \neq 0$ (sauf le cas de la droite passant par le pôle. On aurait alors $\frac{d^2 r}{dt^2} = 0$, le mouvement serait uniforme et l'accélération nulle). Supposons donc $\left(\frac{d\theta}{dt}\right) \neq 0$ et considérons le coefficient de $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$; deux cas se présentent:

1° $\frac{d^2 r}{d\theta^2} - r = 0$, cas d'un cercle passant par le pôle; la condition (1) exige $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$, ce qui montre que *sur un cercle passant par le pôle, un mouvement normal est un mouvement à vitesse angulaire constante* et *réciproquement un mouvement normal à vitesse angulaire constante ne peut avoir lieu que sur un cercle passant par le pôle.*

2° $\frac{d^2 r}{d\theta^2} - r \neq 0$, alors il est impossible que le produit $\frac{dr}{d\theta}\frac{d^2\theta}{dt^2}$ s'ànnule. Comme on peut toujours choisir le mouvement solution de (1) (quand $r(\theta)$ est donné) de telle façon que $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ soit différent de zéro il reste la condition $\frac{dr}{d\theta} \neq 0$, on en déduit que:

Il est impossible de trouver sur un cercle un mouvement normal par rapport à son centre et c'est le seul cas d'exception pour les mouvements plans [1].

II. Nous terminerons en reprenant le dernier calcul de M. Toscano sur la recherche des mouvements normaux et plans dont les accélérations sont de la forme

$$W = k\rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 .$$

[1] Je n'ai pas fait l'étude analogue dans l'espace où les calculs se présentent d'une façon beaucoup moins simple; je ne puis donc conclure dans ce cas.

A partir de la troisième équation k a été à tort égalé à l'unité. En rétablissant cette constante on arrive à l'équation différentielle

$$\frac{du}{u^2 - ku + 1} = d\theta , \quad \text{avec} \quad u = \frac{ds}{d\theta} ; \quad s = \log \rho .$$

On a deux intégrales singulières obtenues en égalant u à l'une des racines de l'équation $u^2 - ku + 1 = 0$.

On trouve ainsi

$$2u = k \pm \sqrt{k^2 - 4} .$$

$$\rho = e^s = e^{\int u d\theta} = \rho_0 e^{u\theta}$$

avec u ayant la valeur donnée par l'équation précédente.

En posant $k = -\frac{1 + b^2}{b}$ il vient

$$k \pm \sqrt{k^2 - 4} = -\left(\frac{1 + b^2}{b}\right) \pm \left(\frac{1 - b^2}{b}\right) = -2b \quad \text{et} \quad -\frac{2}{b} .$$

On a donc les solutions

$$\rho = \rho_0 e^{-b\theta} , \qquad \rho = \rho_1 e^{-\frac{\theta}{b}} ;$$

dont la première est celle considérée page 83.

Il est important de remarquer que, au contraire, si l'on considère l'intégrale générale de

$$\frac{du}{u^2 - ku + 1} = d\theta$$

(trois cas à considérer suivant les valeurs relatives de $|k|$ et de 2) on trouvera des courbes *non réductibles* aux spirales logarithmiques dont on est parti, et cela quelles que soient les valeurs attribuées aux constantes d'intégration.