**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Band:** 30 (1931)

**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DANS UN SYSTÈME HOLONOME SANS FROTTEMENT

**Autor:** Papaïoannou, C. P.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-23885

# SUR LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DANS UN SYSTÈME HOLONOME SANS FROTTEMENT

PAR

C. P. PAPAÏOANNOU (Athènes).

1. — Nous considérons un système holonome $\Sigma$ formé de $n$ points. Soient les équations de liaison de ce système

$$f_a(x_1\,,\ y_1\,,\ z_1\,,\ \ldots\ z_n\,,\ t) = 0 \qquad a = 1\,,\ \ldots\ h < 3n \qquad (1)$$

et les équations auxiliaires

$$f_{h+b}(x_1\,,\ y_1\,,\ z_1\ \ldots\ z_n\,,\ t) = q_b \qquad b = 1\,,\ \ldots\ \ k = 3n - h\,. \qquad (2)$$

Donnons à $t$ une valeur numérique et considérons à l'instant correspondant le système d'équations:

$$\delta f_a = 0\,, \qquad \delta f_{h+b} = \delta q_b\,. \qquad (3)$$

Comme les variations $\delta q$ sont arbitraires, on peut formuler $k$ systèmes successifs d'équations [$S_b$ . $b = 1, \ldots, k$] en supposant dans le système (3) un des $q$ variables, les autres restant constants. Soit un tel système $S_e$ correspondant à la valeur $b = e$

$$(S_e)\ \begin{cases} \delta f_c = 0 & (c = 1\,,\ \ldots\ h + e - 1\,,\ h + e + 1\,,\ \ldots\ 3n) \\ \delta f_{h+e} = \delta q_e & \end{cases}$$

Posons

$$\Delta = \frac{D(f_1\,,\ f_2\,,\ \ldots\ f_{3n})}{D(x_1\,,\ \ldots\ z_n)} \neq 0$$

et résolvons le système $S_e$ par rapport aux $\delta x_\rho$, $\delta y_\rho$, $\delta z_\rho$; nous trouvons

$$\left\{\begin{aligned} \delta x_\varrho &= \frac{1}{\Delta}\delta q_e \Delta^x_{e,\varrho} & \varrho &= 1, 2, \dots n \\ \delta y_\varrho &= \frac{1}{\Delta}\delta q_e \Delta^y_{e,\varrho} & &\text{»} \\ \delta z_\varrho &= \frac{1}{\Delta}\delta q_e \Delta^z_{e,\varrho} & &\text{»} \end{aligned}\right. \qquad (5)$$

où on a désigné par $\Delta^{\omega}_{e,\rho}$ le mineur du déterminant $\Delta$ qu'on obtient en supprimant la ligne correspondante au $\delta q_e$ et la colonne correspondante au $\delta\omega_\rho$.

Ainsi, ont peut trouver $k$ expressions des $\delta x_\rho$, $\delta y_\rho$, $\delta z_{,\rho}$ analogues aux (5) correspondantes aux $k$ systèmes $S_e (e = 1, \dots k)$ et en vertu de ces expressions on peut remplacer l'équation générale de la dynamique

$$\sum_{\varrho=1}^{\varrho=n}\left[\left(X_\varrho - m_\varrho\frac{d^2x_\varrho}{dt^2}\right)\delta x_\varrho + \left(Y_\varrho - m_\varrho\frac{d^2y_\varrho}{dt^2}\right)\delta y_\varrho + \left(Z_\varrho - m_\varrho\frac{d^2z_\varrho}{dt^2}\right)\delta z_\varrho\right] = 0$$

par les $k$ équations

$$\sum\left[\left(X_\varrho - m_\varrho\frac{d^2x_\varrho}{dt^2}\right)\Delta^x_{e,\varrho} + \left(Y_\varrho - m_\varrho\frac{d^2y_\varrho}{dt^2}\right)\Delta^y_{e,\varrho} + \left(Z_\varrho - m_\varrho\frac{d^2z_\varrho}{dt^2}\right)\Delta^z_{e,\varrho}\right] = 0 . \qquad (6)$$

Représentons par le symbole $\Delta_e(A_\rho, B_\rho, \Gamma_\rho)$ le déterminant qu'on obtient en remplaçant dans $\Delta$ la ligne d'ordre $h + e$ par les $(A_1, B_1, \Gamma_1, \dots \Gamma_n)$; nous obtenons les équations (6) sous la forme:

$$\Delta_e(X_\varrho, Y_\varrho, Z_\varrho) = \Delta_e\left(m_\varrho\frac{d^2x_\varrho}{dt^2}, m_\varrho\frac{d^2y_\varrho}{dt^2}, m_\varrho\frac{d^2z_\varrho}{dt^2}\right). \qquad (7)$$

$$(e = 1, \dots k)$$

2. — On peut formuler les équations d'équilibre du système holonome $\Sigma$. Revenons pour cela au n° 1. Il suffit de considérer les équations:

$$f_a(x_1, y_1, z_1, \dots z_n) = 0$$

$$f_{h+b}(x_1, y_1, z_1, \dots z_n) = q_b$$

et les $k$ systèmes d'équations:

$$\delta f_c = 0\,, \qquad \delta f_{h+e} = \delta q_e\,. \qquad (e = 1\,, \ldots k)$$

On obtiendra ainsi, les expressions des $\delta x_\rho$, $\delta y_\rho$, $\delta z_\rho$ analogues aux équations (5) et on remplacera alors l'équation générale de la Statique

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=n} (X_\rho \delta x_\rho + Y_\rho \delta y_\rho + Z_\rho \delta z_\rho) = 0$$

par les $k$ équations

$$\Delta_e(X_\rho\,, Y_\rho\,, Z_\rho) = 0\,. \qquad (e = 1\,, 2\,, \ldots k) \tag{8}$$

Proposons-nous, par exemple, de trouver les conditions d'équilibre d'un point ($x$, $y$, $z$) sur la surface

$$f(x\,, y\,, z) = 0\,.$$

Nous pouvons considérer comme équations auxiliaires les équations:

$$x = q_1\,, \qquad y = q_2\,.$$

Les équations (8) seront alors

$$\Delta_1(X\,, Y\,, Z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ X & Y & Z \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_2(X\,, Y\,, Z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ 1 & 0 & 0 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0$$

d'où l'on déduit les conditions

$$\frac{X}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z}{\frac{\partial f}{\partial z}}\,.$$