

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 30 (1931)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DANS UN SYSTÈME  
HOLONOME SANS FROTTEMENT  
**Autor:** Papaïoannou, C. P.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-23885>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SUR LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DANS UN SYSTÈME HOLONOME SANS FROTTEMENT

PAR

C. P. PAPAÏOANNOU (Athènes).

1. — Nous considérons un système holonome  $\Sigma$  formé de  $n$  points. Soient les équations de liaison de ce système

$$f_a(x_1, y_1, z_1, \dots, z_n, t) = 0 \quad a = 1, \dots, h < 3n \quad (1)$$

et les équations auxiliaires

$$f_{h+b}(x_1, y_1, z_1, \dots, z_n, t) = q_b \quad b = 1, \dots, k = 3n - h \quad (2)$$

Donnons à  $t$  une valeur numérique et considérons à l'instant correspondant le système d'équations:

$$\delta f_a = 0, \quad \delta f_{h+b} = \delta q_b \quad (3)$$

Comme les variations  $\delta q$  sont arbitraires, on peut formuler  $k$  systèmes successifs d'équations  $[S_b, b = 1, \dots, k]$  en supposant dans le système (3) un des  $q$  variables, les autres restant constants. Soit un tel système  $S_e$  correspondant à la valeur  $b = e$

$$(S_e) \left\{ \begin{array}{l} \delta f_c = 0 \quad (c = 1, \dots, h + e - 1, h + e + 1, \dots, 3n) \\ \delta f_{h+e} = \delta q_e \end{array} \right.$$

Posons

$$\Delta = \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_{3n})}{D(x_1, \dots, z_n)} \neq 0$$

et résolvons le système  $S_e$  par rapport aux  $\delta x_\rho, \delta y_\rho, \delta z_\rho$ ; nous trouvons

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta x_\rho = \frac{1}{\Delta} \delta q_e \Delta_{e,\rho}^x \quad \rho = 1, 2, \dots, n \\ \delta y_\rho = \frac{1}{\Delta} \delta q_e \Delta_{e,\rho}^y \quad \text{»} \\ \delta z_\rho = \frac{1}{\Delta} \delta q_e \Delta_{e,\rho}^z \quad \text{»} \end{array} \right. \quad (5)$$

où on a désigné par  $\Delta_{e,\rho}''$  le mineur du déterminant  $\Delta$  qu'on obtient en supprimant la ligne correspondante au  $\delta q_e$  et la colonne correspondante au  $\delta \omega_\rho$ .

Ainsi, on peut trouver  $k$  expressions des  $\delta x_\rho, \delta y_\rho, \delta z_\rho$  analogues aux (5) correspondantes aux  $k$  systèmes  $S_e$  ( $e = 1, \dots, k$ ) et en vertu de ces expressions on peut remplacer l'équation générale de la dynamique

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=n} \left[ \left( X_\rho - m_\rho \frac{d^2 x_\rho}{dt^2} \right) \delta x_\rho + \left( Y_\rho - m_\rho \frac{d^2 y_\rho}{dt^2} \right) \delta y_\rho + \left( Z_\rho - m_\rho \frac{d^2 z_\rho}{dt^2} \right) \delta z_\rho \right] = 0$$

par les  $k$  équations

$$\sum \left[ \left( X_\rho - m_\rho \frac{d^2 x_\rho}{dt^2} \right) \Delta_{e,\rho}^x + \left( Y_\rho - m_\rho \frac{d^2 y_\rho}{dt^2} \right) \Delta_{e,\rho}^y + \left( Z_\rho - m_\rho \frac{d^2 z_\rho}{dt^2} \right) \Delta_{e,\rho}^z \right] = 0. \quad (6)$$

Représentons par le symbole  $\Delta_e(A_\rho, B_\rho, \Gamma_\rho)$  le déterminant qu'on obtient en remplaçant dans  $\Delta$  la ligne d'ordre  $h + e$  par les  $(A_1, B_1, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$ ; nous obtenons les équations (6) sous la forme:

$$\Delta_e(X_\rho, Y_\rho, Z_\rho) = \Delta_e \left( m_\rho \frac{d^2 x_\rho}{dt^2}, m_\rho \frac{d^2 y_\rho}{dt^2}, m_\rho \frac{d^2 z_\rho}{dt^2} \right). \quad (7)$$

. ( $e = 1, \dots, k$ )

2. — On peut formuler les équations d'équilibre du système holonome  $\Sigma$ . Revenons pour cela au n° 1. Il suffit de considérer les équations:

$$\begin{aligned} f_a(x_1, y_1, z_1, \dots, z_n) &= 0 \\ f_{h+b}(x_1, y_1, z_1, \dots, z_n) &= q_b \end{aligned}$$

et les  $k$  systèmes d'équations:

$$\delta f_c = 0, \quad \delta f_{h+e} = \delta q_e. \quad (e = 1, \dots, k)$$

On obtiendra ainsi, les expressions des  $\delta x_\rho, \delta y_\rho, \delta z_\rho$  analogues aux équations (5) et on remplacera alors l'équation générale de la Statique

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=n} (X_\rho \delta x_\rho + Y_\rho \delta y_\rho + Z_\rho \delta z_\rho) = 0$$

par les  $k$  équations

$$\Delta_e(X_\rho, Y_\rho, Z_\rho) = 0. \quad (e = 1, 2, \dots, k) \quad (8)$$

Proposons-nous, par exemple, de trouver les conditions d'équilibre d'un point  $(x, y, z)$  sur la surface

$$f(x, y, z) = 0.$$

Nous pouvons considérer comme équations auxiliaires les équations:

$$x = q_1, \quad y = q_2.$$

Les équations (8) seront alors

$$\Delta_1(X, Y, Z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ X & Y & Z \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_2(X, Y, Z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ 1 & 0 & 0 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0$$

d'où l'on déduit les conditions

$$\frac{X}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$