Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 30 (1931)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: APPLICATION A LA REPRÉSENTATION CONFORME DES TRANSFORMATIONS A VARIABLES SÉPARÉES

Autor: Delens, P. C.

Kapitel: II. Invariants et opérateurs différentiels d'une forme de Pfaff.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23887

Dans le cas où l'on considère deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b} = \mathrm{J}\mathbf{a}$ d'un *simili-repère*, on a d'ailleurs (les rotationnels étant *superficiels*)

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \operatorname{rot} \mathbf{b} \qquad \operatorname{div} \mathbf{b} = - \operatorname{rot} \mathbf{a} , \tag{15}$$

et pour un gradient ∇f on a toujours la condition d'intégrabilité

$$\operatorname{rot} \nabla f = 0 . \tag{16}$$

On connaît d'autre part *(Thèse)* les relations entre les notations vectorielles: produit extérieur de vecteurs, rotationnel — et celles introduites par M. E. Cartan pour les formes de Pfaff: produit extérieur, différentiation extérieure; elles tiennent essentiellement aux formules

$$\left\{ \begin{array}{l} df = \nabla f \times d\mathbf{m} \\ \varpi = \mathbf{a} \times d\mathbf{m} = x df \qquad \mathbf{a} = x \nabla f . \end{array} \right. \tag{17}$$

Aux formules (11) correspond, en calcul vectoriel

$$\nabla g = q \mathrm{J} \nabla f \tag{11'}$$

et (12) s'en déduit en prenant les rotationnels des deux membres.

II. Invariants et opérateurs différentiels d'une forme de Pfaff.

4. Nous dirons que les courbes intégrales d'une équation de Pfaff $\varpi = o$ forment sur la surface un faisceau (simple); la donnée d'une fonction f de u, v (ou de la variable géométrique $\mathbf{m}$) est équivalente à celle des intégrales $f =$ const., prises *individuellement*, de l'équation $df = 0$; au contraire, la donnée d'une équation de Pfaff $\varpi = x df = 0$, revient seulement à celle de *l'ensemble* des courbes intégrales du faisceau.

Soit à conserver, par les transformations conformes (3), une forme de Pfaff

$$\varpi = \mathrm{A}(u, v) du + \mathrm{B}(u, v) dv \tag{18}$$

à laquelle nous avons attaché deux opérateurs différentiels du 1er ordre, ϑ_u et ϑ_v, donnant d'une fonction z les paramètres différentiels

$$\vartheta_u z = \frac{z_u}{\mathrm{A}} \qquad \vartheta_v z = \frac{z_v}{\mathrm{B}} . \tag{19}$$

Nous avons montré l'existence, pour ces transformations conformes, de deux invariants *essentiels* d'ordre deux [1]

$$\alpha = \frac{B_u}{AB} = \frac{1}{A}(\log B)_u = \vartheta_u \log B \qquad \beta = \frac{A_v}{AB} = \frac{1}{B}(\log A)_u = \vartheta_v \log A \tag{20}$$

à partir desquels les invariants d'ordre supérieur se forment par le jeu des opérateurs différentiels ϑ_u et ϑ_v; l'itération de ceux-ci fournit des opérateurs d'ordre supérieur ou des combinaisons linéaires, à coefficients invariants, des opérateurs précédents; nous avions posé

$$\left\{\begin{aligned} (\vartheta_u \vartheta_v) &= \vartheta_u \vartheta_v - \vartheta_v \vartheta_u = \beta\vartheta_u - \alpha\vartheta_v \\ \vartheta_{uv} &= \frac{1}{2}(\vartheta_u \vartheta_v + \vartheta_v \vartheta_u + \beta\vartheta_u + \alpha\vartheta_v) \end{aligned}\right. \tag{21}$$

l'opérateur linéaire du 2^e^ ordre, ϑ_{uv}, donnant pour une fonction z

$$\vartheta_{uv} z = \frac{z_{uv}}{AB} \,. \tag{21'}$$

Les opérateurs ϑ_u et ϑ_v étaient des symboles de transformations infinitésimales agissant respectivement le long des lignes minima $v = \text{const.}$ et $u = \text{const.}$; nous leur substituerons des symboles de transformations agissant le long des lignes du faisceau $\varpi = 0$ et de leurs trajectoires orthogonales, en posant

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{D} &= \frac{1}{2}(\vartheta_u + \vartheta_v) \\ \mathcal{T} &= \frac{i}{2}(\vartheta_u - \vartheta_v) \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \vartheta_u &= \mathcal{D} - i\mathcal{T} \\ \vartheta_v &= \mathcal{D} + i\mathcal{T} \,. \end{aligned}\right. \tag{22}$$

Nous prendrons aussi pour invariants essentiels du second ordre

$$\left\{\begin{aligned} D &= \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \\ T &= \frac{i}{2}(\alpha - \beta) \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \alpha &= D - iT \\ \beta &= D + iT \,. \end{aligned}\right. \tag{23}$$

---

[1] Contrairement à ce que nous avons fait précédemment *(Equivalences)*, l'ordre attribué aux invariants d'une forme ou équation différentielle du 1^er^ ordre est l'ordre de dérivation, *augmenté d'une unité;* cette modification s'impose ici où nous avons parfois à considérer les invariants de formes finies (d'ordre zéro).

5. Aux formules (21) correspondent

$$\left\{\begin{aligned} (\mathcal{D}\mathfrak{T}) &= \mathcal{D}\mathfrak{T} - \mathfrak{T}\mathcal{D} = \mathrm{T}\mathcal{D} - \mathrm{D}\mathfrak{T} \\ \mathcal{L} &= \mathcal{D}^2 + \mathfrak{T}^2 + \mathrm{D}\mathcal{D} + \mathrm{T}\mathfrak{T} \end{aligned}\right. \tag{24}$$

avec

$$(\mathcal{D}\mathfrak{T}) = -\frac{i}{2}(\vartheta_u \vartheta_v) \qquad \mathcal{L} = \vartheta_{uv} \; ; \tag{24'}$$

mais nous introduirons trois opérateurs distincts du 2e ordre, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ et un quatrième opérateur $\mathcal{O}$ identiquement nul, avec les relations

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{D}^2 + \mathfrak{T}^2 + \mathrm{D}\mathcal{D} + \mathrm{T}\mathfrak{T} = \frac{1}{2}(\vartheta_u\vartheta_v + \vartheta_v\vartheta_u + \beta\vartheta_u + \alpha\vartheta_v) \\ \mathcal{M} &= \mathcal{D}^2 - \mathfrak{T}^2 + \mathrm{D}\mathcal{D} - \mathrm{T}\mathfrak{T} = \frac{1}{2}(\vartheta_u^2 + \vartheta_v^2 + \alpha\vartheta_u + \beta\vartheta_v) \\ \mathcal{N} &= \mathcal{D}\mathfrak{T} + \mathfrak{T}\mathcal{D} + \mathrm{T}\mathcal{D} + \mathrm{D}\mathfrak{T} = \frac{i}{2}(\vartheta_u^2 - \vartheta_v^2 + \alpha\vartheta_u - \beta\vartheta_v) \\ \mathcal{O} &= \mathcal{D}\mathfrak{T} - \mathfrak{T}\mathcal{D} - \mathrm{T}\mathcal{D} + \mathrm{D}\mathfrak{T} = -\frac{i}{2}(\vartheta_u\vartheta_v - \vartheta_v\vartheta_u - \beta\vartheta_u + \alpha\vartheta_v) = 0 \,. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

En posant, pour le produit et le quotient des coefficients de la forme ϖ

$$\mathrm{P} = \mathrm{AB} \qquad \mathrm{Q} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} \tag{26}$$

les invariants du 2e ordre s'expriment maintenant par

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{D} &= \frac{1}{2}(\mathcal{D} \log \mathrm{P} + i\mathfrak{T} \log \mathrm{Q}) \\ \mathrm{T} &= \frac{1}{2}(\mathfrak{T} \log \mathrm{P} - i\mathcal{D} \log \mathrm{Q}) \,. \end{aligned}\right. \tag{27}$$

Les quatre invariants distincts du 3e ordre précédemment introduits (et désignés alors par $\omega = \vartheta_u\alpha$, $\theta = \vartheta_u\beta$, $\varphi = \vartheta_v\alpha$, $\psi = \vartheta_v\beta$) s'expriment par

$$\left\{\begin{aligned} \vartheta_u\alpha &= \mathcal{D}\mathrm{D} - \mathfrak{T}\mathrm{T} - i(\mathcal{D}\mathrm{T} + \mathfrak{T}\mathrm{D}) & \vartheta_u\beta &= \mathcal{D}\mathrm{D} + \mathfrak{T}\mathrm{T} + i(\mathcal{D}\mathrm{T} - \mathfrak{T}\mathrm{D}) \\ \vartheta_v\alpha &= \mathcal{D}\mathrm{D} + \mathfrak{T}\mathrm{T} - i(\mathcal{D}\mathrm{T} - \mathfrak{T}\mathrm{D}) & \vartheta_v\beta &= \mathcal{D}\mathrm{D} - \mathfrak{T}\mathrm{T} + i(\mathcal{D}\mathrm{T} + \mathfrak{T}\mathrm{D}) \end{aligned}\right. \tag{28}$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{D}\mathrm{D} &= \frac{1}{4}(\vartheta_u\beta + \vartheta_v\alpha + \vartheta_u\alpha + \vartheta_v\beta) & \mathcal{D}\mathrm{T} &= -\frac{i}{4}(\vartheta_u\beta - \vartheta_v\alpha - \vartheta_u\alpha + \vartheta_v\beta) \\ \mathfrak{T}\mathrm{D} &= \frac{i}{4}(\vartheta_u\beta - \vartheta_v\alpha + \vartheta_u\alpha - \vartheta_v\beta) & \mathfrak{T}\mathrm{T} &= \frac{1}{4}(\vartheta_u\beta + \vartheta_v\alpha - \vartheta_u\alpha - \vartheta_v\beta) \end{aligned}\right. \tag{28'}$$

dont les combinaisons les plus utiles sont

$$\left\{\begin{aligned}
-\mathrm{I} &= \mathcal{D}\mathrm{T} - \mathfrak{T}\mathrm{D} = -\frac{i}{2}(\vartheta_u\beta - \vartheta_v\alpha)\\
-k &= \mathcal{D}\mathrm{D} + \mathfrak{T}\mathrm{T} + \mathrm{D}^2 + \mathrm{T}^2 = \frac{1}{2}(\vartheta_u\beta + \vartheta_v\alpha + 2\alpha\beta)\\
-h &= \mathcal{D}\mathrm{D} - \mathfrak{T}\mathrm{T} + \mathrm{D}^2 - \mathrm{T}^2 = \frac{1}{2}(\vartheta_u\alpha + \vartheta_v\beta + \alpha^2 + \beta^2)\\
-j &= \mathcal{D}\mathrm{T} + \mathfrak{T}\mathrm{D} + 2\mathrm{DT} = \frac{i}{2}(\vartheta_u\alpha - \vartheta_v\beta + \alpha^2 - \beta^2)
\end{aligned}\right. \tag{29}$$

soit, en fonction de P et Q et des opérateurs $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$

$$\left\{\begin{aligned}
-\mathrm{I} &= -\frac{i}{2}\mathcal{L}\log \mathrm{Q}\\
-k &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\log \mathrm{P}\\
-h &= \frac{1}{2}(\mathcal{M}\log \mathrm{P} + i\mathcal{N}\log \mathrm{Q})\\
-j &= \frac{1}{2}(\mathcal{N}\log \mathrm{P} - i\mathcal{M}\log \mathrm{Q})\ .
\end{aligned}\right. \tag{30}$$

Les deux premiers de ces invariants, I et k, sont particulièrement intéressants; nous ne formerons pas ici les invariants et opérateurs d'ordre supérieur.

III. Formes de Pfaff proportionnelles. — Equation de Pfaff. — Adjonction d'un ds^2.

6. Si au lieu d'une forme ϖ on veut conserver, par les transformations conformes, une équation de Pfaff $\varpi = 0$, les invariants de cette équation sont compris dans ceux de la forme ϖ, et on peut les considérer comme communs à toutes les formes proportionnelles $\varpi = x\varpi_0$, c'est-à-dire indépendants du facteur arbitraire x. On pourra choisir pour ϖ_0 une forme ϖ particulière, et nous le ferons dans la suite; pour l'instant, laissant aux formes ϖ et ϖ_0 toute leur généralité, nous allons établir les relations entre les opérateurs différentiels de ces formes ϖ et ϖ_0, puis entre les invariants de ces formes.

Soient donc les formes de Pfaff

$$\varpi_0 = \mathrm{A}_0\,du + \mathrm{B}_0\,dv \qquad \varpi = \mathrm{A}\,du + \mathrm{B}\,dv = x\varpi_0 \tag{31}$$

$$\mathrm{A} = x\mathrm{A}_0 \qquad \mathrm{B} = x\mathrm{B}_0 \qquad \mathrm{P} = x^2\mathrm{P}_0 \qquad \mathrm{Q} = \mathrm{Q}_0\ .$$