III. Formes de Pfaff proportionnelles. — Equation de Pfaff. — Adjonction d'un ds^2.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1931)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

dont les combinaisons les plus utiles sont

$$
\left\{
\begin{aligned}
-\mathrm{I} &= \mathcal{D}\mathrm{T} - \mathfrak{T}\mathrm{D} = -\frac{i}{2}(\vartheta_u\beta - \vartheta_v\alpha) \\
-k &= \mathcal{D}\mathrm{D} + \mathfrak{T}\mathrm{T} + \mathrm{D}^2 + \mathrm{T}^2 = \frac{1}{2}(\vartheta_u\beta + \vartheta_v\alpha + 2\alpha\beta) \\
-h &= \mathcal{D}\mathrm{D} - \mathfrak{T}\mathrm{T} + \mathrm{D}^2 - \mathrm{T}^2 = \frac{1}{2}(\vartheta_u\alpha + \vartheta_v\beta + \alpha^2 + \beta^2) \\
-j &= \mathcal{D}\mathrm{T} + \mathfrak{T}\mathrm{D} + 2\,\mathrm{DT} = \frac{i}{2}(\vartheta_u\alpha - \vartheta_v\beta + \alpha^2 - \beta^2)
\end{aligned}
\right. \tag{29}
$$

soit, en fonction de P et Q et des opérateurs $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$

$$
\left\{
\begin{aligned}
-\mathrm{I} &= -\frac{i}{2}\mathcal{L}\log \mathrm{Q} \\
-k &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\log \mathrm{P} \\
-h &= \frac{1}{2}(\mathcal{M}\log \mathrm{P} + i\mathcal{N}\log \mathrm{Q}) \\
-j &= \frac{1}{2}(\mathcal{N}\log \mathrm{P} - i\mathcal{M}\log \mathrm{Q})\ .
\end{aligned}
\right. \tag{30}
$$

Les deux premiers de ces invariants, I et k, sont particulièrement intéressants; nous ne formerons pas ici les invariants et opérateurs d'ordre supérieur.

III. Formes de Pfaff proportionnelles. — Equation de Pfaff. — Adjonction d'un ds^2.

6. Si au lieu d'une forme ϖ on veut conserver, par les transformations conformes, une équation de Pfaff $\varpi = 0$, les invariants de cette équation sont compris dans ceux de la forme ϖ, et on peut les considérer comme communs à toutes les formes proportionnelles $\varpi = x\varpi_0$, c'est-à-dire indépendants du facteur arbitraire x. On pourra choisir pour ϖ_0 une forme ϖ particulière, et nous le ferons dans la suite; pour l'instant, laissant aux formes ϖ et ϖ_0 toute leur généralité, nous allons établir les relations entre les opérateurs différentiels de ces formes ϖ et ϖ_0, puis entre les invariants de ces formes.

Soient donc les formes de Pfaff

$$
\varpi_0 = \mathrm{A}_0\,du + \mathrm{B}_0\,dv \qquad \varpi = \mathrm{A}\,du + \mathrm{B}\,dv = x\varpi_0 \tag{31}
$$

$$
\mathrm{A} = x\mathrm{A}_0 \qquad \mathrm{B} = x\mathrm{B}_0 \qquad \mathrm{P} = x^2\mathrm{P}_0 \qquad \mathrm{Q} = \mathrm{Q}_0\ .
$$

Les expressions relatives à ϖ_0 étant affectées de l'indice 0, on a évidemment, d'après (19) et (22)

$$\mathcal{D} = \frac{1}{x}\mathcal{D}_0 \qquad \mathcal{T} = \frac{1}{x}\mathcal{T}_0 \tag{32}$$

et les formules (27) donnent, pour les invariants du 2me ordre

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{D} &= \frac{\mathrm{D}_0}{x} + \mathcal{D}\log x = \frac{\mathrm{D}_0}{x} - \mathcal{D}_0\left(\frac{1}{x}\right) \\ \mathrm{T} &= \frac{\mathrm{T}_0}{x} + \mathrm{T}\log x = \frac{\mathrm{T}_0}{x} - \mathcal{T}_0\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}\right. \tag{33}$$

De même, pour les opérateurs du 2me ordre, on obtient

$$\mathcal{L} = \frac{1}{x^2}\mathcal{L}_0 \qquad \mathcal{M} = \frac{1}{x^2}\mathcal{M}_0 \qquad \mathcal{N} = \frac{1}{x^2}\mathcal{N}_0 \tag{34}$$

tandis que

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}\mathcal{T}) &= \frac{1}{x^2}(\mathcal{D}_0\mathcal{T}_0) + \mathcal{T}\log x \,.\, \mathcal{D} - \mathcal{D}\log x \,.\, \mathcal{T} = \\ &\frac{1}{x^2}(\mathcal{D}_0\mathcal{T}_0) - \frac{1}{x}\left\{\mathcal{T}_0\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\mathcal{D}_0 - \mathcal{D}_0\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\mathcal{T}_0\right\}; \end{aligned} \tag{35}$$

on remarquera qu'en particulier

$$(\mathcal{D}\mathcal{T})\log x = \frac{1}{x^2}(\mathcal{D}_0\mathcal{T}_0)\log x \tag{35'}$$

et que la formule (34) pour $\mathcal{L}$ résulte aussitôt, d'après (21') et (24'), de

$$\mathcal{L}z = \vartheta_{uv}z = \frac{z_{uv}}{\mathrm{P}}\,.$$

En tenant compte des relations précédentes, les invariants du 3me ordre sont donnés par

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{I} &= \frac{\mathrm{I}_0}{x^2} \\ k &= \frac{k_0}{x^2} - \mathcal{L}\log x = \frac{k_0}{x^2} + \frac{1}{x}\mathcal{L}_0\left(\frac{1}{x}\right) \\ h &= \frac{h_0}{x^2} - \mathcal{M}\log x = \frac{h_0}{x^2} + \frac{1}{x}\mathcal{M}_0\left(\frac{1}{x}\right) \\ j &= \frac{j_0}{x^2} - \mathcal{N}\log x = \frac{j_0}{x^2} + \frac{1}{x}\mathcal{N}_0\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}\right. \tag{36}$$

La première des formules (36), qui dérive immédiatement de (30) et (34), donne ce résultat important: *le facteur x s'exprime au moyen des invariants du* 3^{me} *ordre* I *et* I_0 *de* ϖ *et* ϖ_0. Ceci est conforme aux prévisions qu'on pouvait faire; pour obtenir les invariants de l'équation $\varpi = 0$, on devait éliminer x et ses dérivées partielles entre les expressions des invariants de la forme ϖ en fonction de ceux de ϖ_0, afin d'arriver aux invariants indépendants de x. Jusqu'à l'ordre 3 inclus existaient 6 invariants distincts de la forme ϖ, contenant les 6 quantités x, x_u, x_v, x_{u^2}, x_{uv}, x_{v^2}: l'élimination des dérivées de x donne donc x en fonction des invariants de ϖ et ϖ_0; les invariants de l'équation $\varpi = 0$ n'apparaissent qu'ensuite, et le nombre de ces invariants distincts des différents ordres, ainsi calculés, coïncide bien avec celui que nous avons déjà obtenu autrement.

7. Si les transformations (3) doivent conserver, en même temps qu'une forme ϖ, le ds^2 de la surface, on retombe sur un problème d'applicabilité (sans déformation superficielle). Les invariants se partagent alors en trois catégories: 1° les invariants conformes de ϖ, indépendants du ds^2, que nous appellerons simplement ses *invariants;* 2° les invariants conformes du ds^2, qui ne sont autres que les *invariants gaussiens* de ce ds^2; 3° les invariants mixtes de ϖ et du ds^2, que nous appellerons *seminvariants* (conformes) de ϖ. De même, si l'on adjoint aux précédentes de nouvelles formes différentielles χ, de Pfaff ou non, à côté des invariants propres de ces formes figureront des invariants mixtes, entre ϖ et χ par exemple. Une fois obtenus les invariants essentiels du système considéré, les invariants d'ordre supérieur s'obtiendront par le jeu de deux opérateurs différentiels, pour lesquels on pourra choisir les opérateurs $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ attachés à la forme ϖ; un changement d'opérateurs se ferait ensuite facilement. Nous venons en outre d'indiquer un procédé pour passer des formes ϖ à des équations $\varpi = 0$.

IV. Invariants d'une différentielle totale et du ds^2.

8. Nous envisageons d'abord le cas d'une forme ϖ_0 différentielle exacte et considérons le système

$$\left\{\begin{aligned} ds^2 &= W^2 du\, dv \\ \varpi_0 &= df = f_u du + f_v dv \qquad A_0 = f_u \quad B_0 = f_v\,. \end{aligned}\right. \tag{37}$$

La forme ϖ_0 n'étant pas générale, les règles relatives à une forme ϖ quelconque ne permettent pas de prévoir le nombre des invariants distincts des différents ordres du système et leur répartition en invariants gaussiens, invariants et seminvariants de ϖ_0 (ou f). Mais