V. Formes de Pfaff semi-normales.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1931)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

formule très générale à laquelle on peut donner bien des formes, par exemple [1]

$$K = \frac{\Lambda\,\Delta f - 2\,\overline{\Lambda f}^2 - 2\,\Delta'(f,\ \Lambda f) - 4\,\Sigma f}{2\,\Delta f}\ .$$

V. Formes de Pfaff semi-normales.

11. Dans la géométrie euclidienne des surfaces (c'est-à-dire la géométrie des surfaces pourvues de la connexion euclidienne induite de l'espace ambiant, soit l'ordinaire géométrie riemannienne sur la surface), on a avantage à considérer, plutôt que la forme $\varpi_0 = df$, la forme

$$\varpi_1 = \frac{df}{\sqrt{\Delta f}} = x_1 \varpi_0 \qquad x_1 = \frac{1}{\sqrt{\Delta f}} \tag{53}$$

Le système formé d'une équation $\varpi = 0$ et du ds^2 est en effet équivalent, pour les transformations conformes, à cette seule forme ϖ_1, normée vis-à-vis du ds^2, de sorte que les invariants de cette forme soient ceux du système indiqué. Nous dirons que la forme ϖ_1 est *canonique* pour le ds^2, ou *semi-normale* (on pourrait encore dire *unitaire*); le facteur x_1, la normant ainsi à partir de la forme ϖ_0, a pour effet de ramener à l'unité le seminvariant du 1^{er} ordre S_1 de la forme ϖ_1. Les invariants de ϖ_1 indépendants de x_1 sont les invariants de l'équation $\varpi = 0$; les autres invariants de ϖ_1 sont des semi-invariants ou des invariants gaussiens.

Les opérateurs différentiels du 1^{er} ordre de ϖ_1 sont

$$\mathcal{D}_1 = \sqrt{\Delta f}\,\mathcal{D}_0 \qquad \mathcal{T}_1 = \sqrt{\Delta f}\,\mathcal{T}_0 \tag{54}$$

et pour l'opérateur $\mathcal{L}_1$ du 2^{me} ordre, on a

$$\mathcal{L}_1 = \Delta f . \mathcal{L}_0\ . \tag{55}$$

---

[1] Au moyen des formules

$$\Delta'(f,\ \Omega f) = \frac{\Delta'(f,\ \Lambda f)}{\Delta f} - \frac{\Delta'' f . \Lambda f}{\overline{\Delta f}^2} \qquad \Lambda \log \Delta f = \frac{\Lambda\,\Delta f}{\Delta f} - \frac{\Delta^2 f}{\overline{\Delta f}^2} \qquad \Sigma f = \frac{\Delta^2 f - 2\,\Delta'' f . \Lambda f}{4\,\Delta f}$$

Pour un faisceau de lignes parallèles, avec $\boldsymbol{\Delta} f = 1$, on retrouve la formule connue

$$K = -\,\overline{\Lambda f}^2 - \Delta'(f,\ \Lambda f)\ .$$

Pour un faisceau isotherme, avec $\Lambda f = \Omega f = 0$

$$K = \Lambda \log \sqrt{\Delta f}\ .$$

Par suite, si on introduit les vecteurs unitaires

$$\mathbf{d} = \frac{\nabla f}{\sqrt{\Delta f}} \qquad \mathbf{t} = \mathrm{J}\,\mathbf{d} \tag{56}$$

on obtient pour les paramètres différentiels les expressions suivantes

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{D}_1 z &= \frac{\Delta'(f,\ z)}{\sqrt{\Delta f}} = \frac{dz}{ds_d} = \mathbf{d} \times \nabla z \\ \mathcal{T}_1 z &= \frac{\Theta'(f,\ z)}{\sqrt{\Delta f}} = \frac{dz}{ds_t} = [\mathbf{d}\,.\nabla z] = \mathbf{t} \times \nabla z \\ \mathcal{L}_1 z &= \Lambda z = \left(\frac{d^2}{ds_d^2} + \frac{d^2}{ds_t^2} + \mathrm{D}_1\frac{d}{ds_d} + \mathrm{T}_1\frac{d}{ds_t}\right) z = \operatorname{div} \nabla z \end{aligned}\right. \tag{57}$$

et aussi

$$(\mathcal{D}_1\mathcal{T}_1) z = \left(\frac{d^2}{ds_t\,ds_d} - \frac{d^2}{ds_d\,ds_t}\right) z = \left(\mathrm{T}_1\frac{d}{ds_d} - \mathrm{D}_1\frac{d}{ds_t}\right) z$$

$$\frac{d^2}{ds_i\,ds_j} = \frac{d}{ds_j}\,\frac{d}{ds_i}\,.$$

12. L'on a en particulier

$$\mathcal{D}_1 f = \sqrt{\Delta f} = \frac{df}{ds_d} \qquad \mathcal{T}_1 f = \frac{df}{ds_t} = 0$$

et les invariants du 2^{me} ordre, D_1 et T_1, de la forme semi-normale, sont donnés par les formules (24) ou (33) suivant

$$-\frac{d^2 f}{ds_d\,ds_t} = \mathrm{T}_1\frac{df}{ds_d} \qquad \Lambda f = \frac{d^2 f}{ds_d^2} + \mathrm{D}_1\frac{df}{ds_d}$$

soit

$$\mathrm{D}_1 = \sqrt{\Delta f}\,.\,\Omega f - \frac{\Delta'(f,\ \sqrt{\Delta f})}{\Delta f} \qquad \mathrm{T}_1 = -\frac{\Theta'(f,\ \sqrt{\Delta f})}{\Delta f} \tag{58}$$

ou encore

$$\mathrm{D}_1 = -\frac{\Delta'' f - 2\Delta f\,.\,\Lambda f}{2\,\overline{\Delta f}^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\Gamma f}{2\,\overline{\Delta f}^{\frac{3}{2}}} \qquad \mathrm{T}_1 = -\frac{\Theta'' f}{2\,\overline{\Delta f}^{\frac{3}{2}}}\,. \tag{58'}$$

On reconnaît en D_1 et T_1 les courbures géodésiques des courbes $\varpi = 0$ et de leurs trajectoires orthogonales, mesurées respectivement suivant les normales $(-\mathbf{d})$ et $(-\mathbf{t})$ à ces courbes; en considérant au contraire **t** et **d** comme les tangentes positives à ces courbes, g_t et g_d étant les courbures mesurées suivant les normales (— **d**) et **t**, on aurait

$$D_1 = g_t \qquad T_1 = -g_d\,. \tag{59}$$

Par les formules (27), on obtenait, en utilisant (49) et (38′)

$$\left\{\begin{aligned} D_1 &= \mathcal{D}_1 \log W + \mathcal{T}_1 \varphi = \frac{\Delta'(f,\ \log W) + \Theta'(f,\ \varphi)}{\sqrt{\Delta f}} \\ &= \frac{d \log W}{ds_d} + \frac{d\varphi}{ds_t} = \mathbf{d} \times \nabla \log W + \mathbf{t} \times \nabla \varphi \\ T_1 &= \mathcal{T}_1 \log W - \mathcal{D}_1 \varphi = \frac{\Theta'(f,\ \log W) - \Delta'(f,\ \varphi)}{\sqrt{\Delta f}} \\ &= \frac{d \log W}{ds_t} - \frac{d\varphi}{ds_d} = \mathbf{t} \times \nabla \log W - \mathbf{d} \times \nabla \varphi\,. \end{aligned}\right. \tag{60}$$

On reconnait dans ces formules le rôle des deux vecteurs (formant simili-repère).

$$\mathbf{f}_1 = \nabla\varphi + J\nabla \log W \qquad \mathbf{g}_1 = J\mathbf{f}_1 = -\nabla \log W + J\nabla\varphi \tag{61}$$

qui permettent d'écrire

$$\left\{\begin{aligned} &\mathbf{f}_1 = -T_1\mathbf{d} + D_1\mathbf{t} && \mathbf{g}_1 = -D_1\mathbf{d} - T_1\mathbf{t} \\ &D_1 = -\mathbf{d} \times \mathbf{g}_1 && T_1 = -\mathbf{t} \times \mathbf{g}_1\,; \end{aligned}\right. \tag{62}$$

en particulier

$$\mathbf{g}_1 = -\Omega f . \nabla f + \frac{1}{2} \nabla \log \Delta f\,. \tag{63}$$

13. Nous avons en effet indiqué *(Thèse)* qu'à un faisceau simple de courbes est associé le *réseau angulaire* des courbes coupant celles du faisceau sous des angles constants et montré que les propriétés de courbure géodésique de ce réseau sont résumées en ces vecteurs; φ est, comme le montre la formule (49), l'angle de la normale **d** d'une courbe du faisceau $\varpi = 0$ avec la courbe du faisceau isotherme $dY = 0$ qui la coupe au point considéré, donc avec la normale au même point à la courbe du faisceau isotherme $dX = 0$.

Les formules (61) mettent bien en évidence deux éléments géométriques importants: d'une part, le module W de la représentation conforme entre le (ds^2 euclidien) $dl^2 = dX^2 + dY^2$ suivant lequel on peut représenter le ds^2 considéré, et ce ds^2; d'autre part, l'angle φ qui caractérise le faisceau en question, et par suite aussi le réseau angulaire associé.

Sans insister pour le moment sur les opérateurs du 2e ordre $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{N}_1$, nous donnons, en tenant compte de

$$P_1 = \frac{P_0}{\Delta f} = \frac{W^2}{4}$$

les expressions des invariants du 3e ordre de la forme semi-normale ϖ_1

$$I_1 = \Theta'(f, \Omega f) = \Lambda\varphi = \operatorname{div} \mathbf{f}_1 = \operatorname{rot} \mathbf{g}_1 \tag{64}$$

$$k_1 = K = -\Lambda \log W = -\operatorname{rot} \mathbf{f}_1 = \operatorname{div} \mathbf{g}_1 \tag{65}$$

ce qui correspond aux formules (50) et (51) ou à l'expression (52) de K au moyen des paramètres différentiels de f; puis

$$-h_1 = \mathcal{M}_1 \log W + \mathcal{N}_1\varphi \qquad -j_1 = \mathcal{N}_1 \log W - \mathcal{M}_1\varphi\ ^1. \tag{66}$$

Nous avons donc retrouvé la courbure totale K du ds^2 comme invariant du 3e ordre d'une forme semi-normale, et l'application des formules (29) avec les opérateurs différentiels $\frac{d}{ds_d}$ et $\frac{d}{ds_t}$ donne encore, pour I_1 et K, des résultats connus.

14. A côté des formes déjà étudiées ϖ_0 et ϖ_1, on pourrait considérer la forme

$$\varpi_2 = \frac{df}{\Delta f} = x_2\varpi_2 \qquad x_2 = \frac{1}{\Delta f}$$

pour laquelle les paramètres différentiels du 1er ordre d'une fonction z sont

$$\mathcal{D}_2 z = \Delta'(f, z) \qquad \mathcal{T}_2 z = \Theta'(f, z)$$

et qui est telle que

$$\varpi_0\varpi_2 = \varpi_1^2$$

$$\mathcal{D}_0 z . \mathcal{D}_2 z = \overline{\mathcal{D}_1 z}^2 \qquad \mathcal{T}_0 z . \mathcal{T}_2 z = \overline{\mathcal{T}_1 z}^2 \qquad \mathcal{L}_0 z . \mathcal{L}_2 z = \overline{\mathcal{L}_1 z}^2 \qquad \text{etc.}$$

Plus généralement on peut associer à toute forme ϖ une forme *inverse* $\overline{\varpi}$ telle que $\varpi\overline{\varpi} = \varpi_1^2$, les paramètres différentiels attachés à ces formes satisfaisant aux dernières des relations précédentes.

Dans le cas d'une forme ϖ quelconque, la théorie générale montre

---

[1] Les invariants I_1, k_1, h_1, j_1 sont les composantes du tenseur $\nabla \mathbf{g}_1 + \mathbf{f}_1^2 - \mathbf{g}_1^2$, de sorte que

$$\nabla \mathbf{g}_1 + \mathbf{f}_1^2 - \mathbf{g}_1^2 = I_1 \frac{\mathbf{td} - \mathbf{dt}}{2} + k_1 \frac{\mathbf{d}^2 + \mathbf{t}^2}{2} + h_1 \frac{\mathbf{d}^2 - \mathbf{t}^2}{2} + j_1 \frac{\mathbf{td} + \mathbf{dt}}{2}.$$

que jusqu'à l'ordre n inclus, on doit *régulièrement*[1] prévoir $n(n-2)$ invariants, dont $2(n-1)$ nouveaux d'ordre n; si un ds^2 est adjoint, le nombre des invariants du système s'élève à $\frac{n(3n-1)}{2}$, dont $3n-2$ nouveaux d'ordre n; par suite les seminvariants sont au nombre de $3n$, dont 3 nouveaux pour chaque ordre. Cette régularité n'est d'ailleurs pas acquise pour les premiers ordres; c'est ainsi que pour l'ordre *un* existe le seul seminvariant $S = \frac{4P}{W^2}$, que nous avons réduit à l'unité pour les formes semi-normales.

VI. Formes de Pfaff adjointes — Opérateurs et invariants — $d\sigma^2$ canonique a une forme.

15. Dans le réseau angulaire attaché à un faisceau simple de courbes, nous avons déjà eu à considérer le faisceau simple des trajectoires orthogonales des courbes de la première famille. Entre les invariants et les opérateurs appartenant à ces deux faisceaux, des rapprochements intéressants sont à faire. Pour simplifier le langage, nous dirons que des formes de Pfaff ϖ et χ sont *orthogonales* si les courbes intégrales des deux équations $\varpi = 0$ et $\chi = 0$ sont deux faisceaux de trajectoires orthogonales; en outre, à toute forme ϖ nous associerons plus particulièrement une des formes orthogonales ϖ_i, que nous dirons *adjointe positive* de ϖ (ϖ étant l'*adjointe négative* de ϖ_i), telle que

$$\left\{\begin{aligned} \varpi &= x\,df = A\,du + B\,dv \\ \varpi_i &= y\,dg = i(-A\,du + B\,dv) = A_i\,du + B_i\,dv \end{aligned}\right. \tag{67}$$

et nous affecterons de l'indice i les expressions relatives à cette forme ϖ_i; on aura les relations

$$P_i = P \qquad Q_i = -Q$$

et comme

$$A = xf_u = iyg_u \qquad B = xf_v = -iyg_v$$

on voit, en posant

$$p = xy \qquad q = \frac{x}{y} \tag{68}$$

[1] Quand il y a k équations de conditions pour exprimer la conservation d'un système par les transformations (3), le nombre des invariants à prévoir jusqu'à l'ordre n inclus est $k\frac{n(n+1)}{2} - 2n$. (Cf. la note du n° 4).