

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 30 (1931)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** APPLICATION A LA REPRÉSENTATION CONFORME DES TRANSFORMATIONS A VARIABLES SÉPARÉES  
**Autor:** Delens, P. C.  
**Kapitel:** VI. Formes de Pfaff adjointes — Opérateurs et invariants —  $\sigma^2$  CANONIQUE A UNE FORME.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-23887>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 08.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

que jusqu'à l'ordre  $n$  inclus, on doit *régulièrement*<sup>1</sup> prévoir  $n(n-2)$  invariants, dont  $2(n-1)$  nouveaux d'ordre  $n$ ; si un  $ds^2$  est adjoint, le nombre des invariants du système s'élève à  $\frac{n(3n-1)}{2}$ , dont  $3n-2$  nouveaux d'ordre  $n$ ; par suite les seminvariants sont au nombre de  $3n$ , dont 3 nouveaux pour chaque ordre. Cette régularité n'est d'ailleurs pas acquise pour les premiers ordres; c'est ainsi que pour l'ordre  $un$  existe le seul seminvariant  $S = \frac{4P}{W^2}$ , que nous avons réduit à l'unité pour les formes semi-normales.

VI. FORMES DE PFAFF ADJOINTES — OPÉRATEURS ET INVARIANTS —  
 $d\sigma^2$  CANONIQUE A UNE FORME.

15. Dans le réseau angulaire attaché à un faisceau simple de courbes, nous avons déjà eu à considérer le faisceau simple des trajectoires orthogonales des courbes de la première famille. Entre les invariants et les opérateurs appartenant à ces deux faisceaux, des rapprochements intéressants sont à faire. Pour simplifier le langage, nous dirons que des formes de Pfaff  $\varpi$  et  $\chi$  sont *orthogonales* si les courbes intégrales des deux équations  $\varpi = 0$  et  $\chi = 0$  sont deux faisceaux de trajectoires orthogonales; en outre, à toute forme  $\varpi$  nous associerons plus particulièrement une des formes orthogonales  $\varpi_i$ , que nous dirons *adjointe positive* de  $\varpi$  ( $\varpi$  étant l'*adjointe négative* de  $\varpi_i$ ), telle que

$$\begin{cases} \varpi = xdf = Adu + Bdv \\ \varpi_i = ydg = i(-Adu + Bdv) = A_i du + B_i dv \end{cases} \quad (67)$$

et nous affecterons de l'indice  $i$  les expressions relatives à cette forme  $\varpi_i$ ; on aura les relations

$$P_i = P \quad Q_i = -Q$$

et comme

$$A = xf'_u = iyg'_u \quad B = xf'_v = -iyg'_v$$

on voit, en posant

$$p = xy \quad q = \frac{x}{y} \quad (68)$$

<sup>1</sup> Quand il y a  $k$  équations de conditions pour exprimer la conservation d'un système par les transformations (3), le nombre des invariants à prévoir jusqu'à l'ordre  $n$  inclus est  $k \frac{n(n+1)}{2} - 2n$ . (Cf. la note du n° 4).

que les fonctions  $f, g, q$  satisfont aux relations établies aux nos 2 et 3 par les formules (11), (11'), (12) et (13). On a aussi

$$\begin{cases} 2Adu = xdf + ydg = \omega + i\omega_i \\ 2Bdv = xdf - ydg = \omega - i\omega_i \end{cases} \quad (69)$$

ce qui établit une symétrie intéressante entre les variables  $u, v$  et  $f, g$  et entre les formes  $Adu, Bdv$  et  $\omega, \omega_i$ .

#### 16. Les formules

$$\mathfrak{D}_{ui} = i\mathfrak{D}_u \quad \mathfrak{D}_{vi} = -i\mathfrak{D}_v$$

donnent aussitôt pour les opérateurs du 1<sup>er</sup> ordre et les invariants du 2<sup>e</sup> ordre

$$\mathcal{O}_i = \mathfrak{O} \quad \mathfrak{O}_i = -\mathcal{O} \quad (70)$$

$$\mathcal{D}_i = \mathfrak{T} \quad \mathfrak{T}_i = -\mathcal{D} \quad (71)$$

On a ensuite, pour les opérateurs du 2<sup>e</sup> ordre et la parenthèse du 1<sup>er</sup> ordre.

$$\begin{cases} \mathcal{L}_i = \mathfrak{L} & \mathcal{M}_i = -\mathfrak{M} & \mathcal{N}_i = -\mathfrak{N} \\ (\mathcal{O}_i \mathfrak{O}_i) = (\mathcal{O} \mathfrak{O}) \end{cases} \quad (72)$$

puis pour les invariants du 3<sup>e</sup> ordre

$$I_i = \mathfrak{I} \quad k_i = k \quad h_i = -h \quad j_i = -j \quad (73)$$

Les relations intimes qui se poursuivent entre les opérateurs et les invariants de formes adjointes  $\omega$  et  $\omega_i$  — et se généraliseraient pour des formes  $\omega_\theta = \cos \theta \cdot \omega + \sin \theta \cdot \omega_i$  — ont leur origine dans les expressions vectorielles, invariantes ou comitantes, du réseau angulaire attaché à ces formes. Cela était déjà apparent pour les formes semi-normales, et nous reviendrons sur le point de vue vectoriel. Mais nous remarquerons d'abord qu'à toute forme  $\omega$  est attachée une forme quadratique comitante  $d\sigma^2$ , que nous dirons *canonique* pour  $\omega$ , et liée à cette forme  $\omega$  comme le  $ds^2$  l'est à une forme semi-normale; en posant en effet

$$d\sigma^2 = 4P du dv = \omega^2 + \omega_i^2 \quad (74)$$

et considérant  $d\sigma^2$  comme un  $ds^2$  donné, le seminvariant  $S$  d'ordre un de  $\omega$  par rapport à ce  $ds^2$  est réduit à l'unité; entre autres conséquences, l'invariant du 3<sup>e</sup> ordre  $k$  de  $\omega$  est la courbure totale de la forme  $d\sigma^2$ . Si une forme  $\omega$  est d'abord considérée en liaison avec

un  $ds^2$  donné, on pourra, par des transformations conformes appropriées, conserver cette forme et ramener le  $ds^2$  à la forme  $d\sigma^2$ , pour laquelle  $\varpi$  est canonique. Les expressions vectorielles interprétées pour une forme semi-normale, par rapport au  $ds^2$ , donneront donc lieu à une interprétation analogue pour une forme quelconque, par rapport au  $d\sigma^2$  canonique.

17. Reprenons le cas d'un  $ds^2$  donné, c'est-à-dire d'un étalon de longueur invariant fixé en tout point  $\mathbf{m}$  d'une surface. Soient

$$\varpi = \mathbf{a} \times d\mathbf{m} \quad ds^2 = (d\mathbf{m})^2 \quad (75)$$

la forme  $\varpi$  et le  $ds^2$  donnés, et la forme adjointe

$$\varpi_i = \mathbf{b} \times d\mathbf{m} \quad \mathbf{b} = \mathbf{J}\mathbf{a} . \quad (76)$$

En se reportant aux formes (67), ou encore

$$\mathbf{a} = x\nabla f \quad \mathbf{b} = x\nabla g \quad (67')$$

et aux formules (32) et (39), les opérateurs de  $\varpi$  et  $\varpi_i$  fourniront les paramètres différentiels d'une fonction  $z$ , que nous écrirons, avec les vecteurs *inverses* de  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{a^2} \quad \bar{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b}}{b^2} \quad (77)$$

sous les formes

$$\mathcal{O}_z = \frac{\mathbf{a} \times \nabla z}{a^2} = \bar{\mathbf{a}} \times \nabla z \quad \mathcal{G}_z = \frac{\mathbf{b} \times \nabla z}{b^2} = \bar{\mathbf{b}} \times \nabla z . \quad (78)$$

Par l'effet de la parenthèse

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}\mathcal{G})_z &= \bar{\mathbf{a}} \times \nabla(\bar{\mathbf{b}} \times \nabla z) - \bar{\mathbf{b}} \times \nabla(\bar{\mathbf{a}} \times \nabla z) \\ &= (\nabla\bar{\mathbf{b}} \times \bar{\mathbf{a}} - \nabla\bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}}) \times \nabla z \end{aligned}$$

le vecteur comitant

$$-\mathbf{f} = \nabla\bar{\mathbf{b}} \times \bar{\mathbf{a}} - \nabla\bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}} \quad (79)$$

et la forme de Pfaff correspondante  $-\mathbf{f} \times d\mathbf{m}$  sont mis en évidence.

18. Pour une forme semi-normale  $\varpi_1$  et les vecteurs

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 = \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{d} &= \frac{\nabla f}{\sqrt{\Delta f}} \quad \mathbf{b}_1 = \bar{\mathbf{b}}_1 = \mathbf{t} = \mathbf{J}\mathbf{d} \\ -\mathbf{f}_1 &= \nabla\mathbf{t} \times \mathbf{d} - \nabla\mathbf{d} \times \mathbf{t} \end{aligned} \quad (79')$$

$\mathbf{f}_1$  est le vecteur de la formule (61) et l'on a aussi

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 f &= \sqrt{\Delta} f & \mathfrak{C}_1 f &= 0 \\ \mathcal{D}_1 g &= -\mathfrak{C}_{1i} g = 0 & \mathfrak{C}_1 g &= \mathcal{D}_{1i} g = \sqrt{\Delta} g \\ -\mathbf{f}_1 \times \nabla f &= (\mathcal{D}_1 \mathfrak{C}_1) f = T_1 \sqrt{\Delta} f & T_1 &= -\mathbf{f}_1 \times \mathbf{d} = -\mathbf{g}_1 \times \mathbf{t} \\ -\mathbf{f}_1 \times \nabla g &= (\mathcal{D}_1 \mathfrak{C}_1) g = -D_1 \sqrt{\Delta} g & D_1 &= \mathbf{f}_1 \times \mathbf{t} = -\mathbf{g}_1 \times \mathbf{d} \end{aligned}$$

comme cela a été établi; par suite, puisque

$$\begin{aligned} \mathbf{d} \times \nabla \mathbf{d} &= \mathbf{t} \times \nabla \mathbf{t} = 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} \nabla \mathbf{d} = \mathbf{t} \mathbf{f}_1 \quad \nabla \mathbf{t} = -\mathbf{d} \mathbf{f}_1 \\ D_1 = \operatorname{div} \mathbf{d} \quad T_1 = \operatorname{div} \mathbf{t} \quad -\mathbf{g}_1 = (\operatorname{div} \mathbf{d}) \mathbf{d} + (\operatorname{div} \mathbf{t}) \mathbf{t} . \end{array} \right. \quad (80) \end{aligned}$$

Les formules (78) montrent bien que les opérateurs  $\mathcal{D}$  et  $\mathfrak{C}$  sont indépendants du  $ds^2$ , utilisé seulement comme intermédiaire, et les formules (80) donneront, pour une forme  $\varpi$ , des expressions analogues à celles obtenues pour une forme semi-normale si au  $ds^2$  est substitué le  $d\sigma^2$  canonique à cette forme, et si les opérations (multiplication intérieure, gradient, divergence, etc.) sont effectuées vis-à-vis de ce  $d\sigma^2$ .

On peut alors, aux symboles  $\frac{d}{ds_d}$ ,  $\frac{d}{ds_t}$  utilisés aux nos 11 et suivants, substituer des symboles  $\frac{d}{d\sigma_a}$ ,  $\frac{d}{d\sigma_b}$ , bien qu'ils n'aient pas une signification absolue comme les précédents, la forme  $d\sigma^2$  étant attachée à la forme  $\varpi$ .

On obtient une autre notation convenable pour les opérateurs  $\mathcal{D}$  et  $\mathfrak{C}$  en portant des formes différentielles exactes  $df$  et  $dg$ ; d'après les formules (32) du n° 6 et (39) du n° 9, en tenant compte de

$$\nabla z = z_f \nabla f + z_g \nabla g \quad \nabla g = \frac{x}{y} J \nabla f$$

il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0 z &= z_f \\ \mathfrak{C}_0 z &= \frac{x}{y} z_g \quad \text{ou} \quad (\mathcal{D}_i)_0 z = z_g \end{aligned}$$

et par suite

$$\mathcal{D} z = \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial f} \quad \mathfrak{C} z = \mathcal{D}_i z = \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial g} \quad (81)$$

d'où la notation symbolique

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\varpi} \quad \mathfrak{C} = \mathcal{D}_i = \frac{\partial}{\varpi_i} \quad (82)$$

les  $\partial$  rappelant l'accouplement des formes de Pfaff  $\varpi$  et  $\varpi_i$ .

Une notation voisine est atteinte en partant de la relation identique entre trois formes de Pfaff à deux variables (analogue à celle entre trois vecteurs du plan), et choisissent pour une de ces formes une différentielle exacte  $dz$

$$[\varpi\chi] dz = - [\chi dz]\varpi + [\varpi dz]\chi \quad (83)$$

$$dz = \frac{[\chi dz]}{[\chi\varpi]} \varpi + \frac{[\varpi dz]}{[\varpi\chi]} \chi$$

puis convenant de l'écriture symbolique

$$dz = \left[ \frac{dz}{\varpi} \right] \varpi + \left[ \frac{dz}{\chi} \right] \chi \quad (84)$$

de sorte qu'une réduction au dénominateur commun  $[\varpi\chi]$ , effectuée suivant les règles de la multiplication extérieure, rétablisse la signification de l'expression; la notation  $\left[ \frac{dz}{\varpi} \right]$  a l'avantage d'une analogie avec celle du quotient entier. Dans le cas particulier  $\chi = \varpi_i$ , on trouve ainsi

$$\mathcal{D}_z = \left[ \frac{dz}{\varpi} \right] \quad \mathfrak{C}_z = \mathcal{D}_i z = \left[ \frac{dz}{\varpi_i} \right] \quad (85)$$

notation voisine de (82).

19. Nous allons étendre l'analogie, déjà signalée à la fin du n° 15, entre les variables  $u, \nu$  et  $f, g$ , entre les formes  $Adu, Bdv$  et  $\varpi, \varpi_i$ , commencée par les formules (67) et (69) entre autres. Nous rapprochons pour cela les formules (19) et (81)

$$\mathcal{D}_z = \frac{z_f}{x} \quad \mathfrak{C}_z = \frac{z_g}{y} \quad (81)$$

$$\mathfrak{D}_u z = \frac{z_u}{A} \quad \mathfrak{D}_\nu z = \frac{z_\nu}{B} \quad (19)$$

puis les invariants du 1<sup>er</sup> ordre obtenus par l'emploi de ces paramètres différentiels; en appliquant en effet les formules (33) à partir de  $\varpi_0 = df$  et  $(\varpi_i)_0 = dg$ , on obtient

$$D = -T_i = -\mathfrak{C}_i \log y = \mathcal{D} \log y \quad T = \mathfrak{C} \log x \quad (86)$$

$$\alpha = \mathfrak{D}_u \log B \quad \beta = \mathfrak{D}_\nu \log A \quad (20)$$

et on complète les formules déjà obtenues par

$$\left\{ \begin{array}{l} D = \frac{1}{2} (\mathcal{O} \log P + i\mathcal{C} \log Q) = \frac{1}{2} (\mathcal{O} \log p - \mathcal{O} \log q) \\ T = \frac{1}{2} (\mathcal{C} \log P - i\mathcal{O} \log Q) = \frac{1}{2} (\mathcal{C} \log p + \mathcal{C} \log q) \end{array} \right. \quad (87)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{2} (\mathfrak{A}_u \log p - \mathfrak{A}_v \log q) = \frac{1}{2} (\mathfrak{A}_u \log P - \mathfrak{A}_u \log Q) \\ \beta = \frac{1}{2} (\mathfrak{A}_v \log p - \mathfrak{A}_u \log q) = \frac{1}{2} (\mathfrak{A}_v \log P + \mathfrak{A}_v \log Q) . \end{array} \right. \quad (88)$$

Les relations entre opérateurs du 2<sup>e</sup> ordre et parenthèses ont été données par les formules (24') et (25), mais en remarquant l'analogie des formes

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\mathfrak{A}_u \mathfrak{A}_v + \mathfrak{A}_v \mathfrak{A}_u + \beta \mathfrak{A}_u + \alpha \mathfrak{A}_v)$$

$$\mathcal{N} = \mathcal{O}\mathcal{C} + \mathcal{C}\mathcal{O} + T\mathcal{O} + D\mathcal{C}$$

on voit en particulier qu'à

$$\mathcal{L}z = \mathfrak{A}_{uv}z = \frac{z_{uv}}{P}$$

correspond

$$\mathcal{N}z = \frac{2z_{fg}}{p} . \quad (89)$$

Pour les invariants du 3<sup>e</sup> ordre, on complète les formules (30) par

$$\left\{ \begin{array}{l} -I = -\frac{i}{2} \mathcal{L} \log Q = \frac{1}{2} \mathcal{N} \log q \\ -k = \frac{1}{2} \mathcal{L} \log P = \frac{1}{2} (\mathcal{L} \log p - \mathcal{N} \log q) \\ -h = \frac{1}{2} (\mathcal{N} \log P + i\mathcal{L} \log Q) = \frac{1}{2} (\mathcal{N} \log p - \mathcal{L} \log q) \\ -j = \frac{1}{2} (\mathcal{L} \log P - i\mathcal{N} \log Q) = \frac{1}{2} \mathcal{L} \log p . \end{array} \right. \quad (90)$$

20. Revenons encore sur certaines expressions vectorielles intéressantes; les trajectoires orthogonales  $g = \text{const.}$  des courbes  $f = \text{const.}$  correspondant à la relation

$$\nabla g = qJ\nabla f \quad (11')$$

on en déduit, comme nous l'avons vu

$$\Delta f = -\nabla f \times \nabla \log q \quad \Delta g = \nabla g \times \nabla \log q \quad (12')$$

d'où le vecteur

$$\nabla \log q = -\Omega f \cdot \nabla f + \Omega g \cdot \nabla g \quad (91)$$

et en prenant les rotationnels (condition d'intégrabilité), on obtient

$$[\nabla f \cdot \nabla \Omega f] = [\nabla g \cdot \nabla \Omega g] \quad (92)$$

$$I_1 = \Theta'(f, \Omega f) = \Theta'(g, \Omega g) ; \quad (64) \quad (92')$$

on vérifie encore que le seminvariant  $I_1$  n'est pas altéré si on substitue à  $f$ , par exemple, une fonction quelconque  $F(f)$  de cette variable <sup>1</sup>.

Mais, à partir des formules (80), on obtient aussi

$$\Delta \mathbf{d} = I_1 \mathbf{t} - (D_1^2 + T_1^2) \mathbf{d} \quad \Delta \mathbf{t} = -I_1 \mathbf{d} - (D_1^2 + T_1^2) \mathbf{t} \quad (93)$$

$$I_1 = \mathbf{t} \times \Delta \mathbf{d} = -\mathbf{d} \times \Delta \mathbf{t} = [\mathbf{d} \cdot \Delta \mathbf{d}] = [\mathbf{t} \cdot \Delta \mathbf{t}] \quad (94)$$

autre expression de ce seminvariant fondamental.

Nous allons montrer la relation entre les formes  $[\nabla f \cdot \nabla \Omega f]$  et  $[\mathbf{d} \cdot \Delta \mathbf{d}]$  en supposant la forme  $\omega_0 = df$  réalisée sur un  $ds^2$  égal à son  $d\sigma_0^2$  canonique; on a alors

$$\mathbf{d} = \nabla f \quad \Delta f = 1 \quad \omega_0 = \omega_1$$

$$\nabla \mathbf{d} = \mathbf{t} \mathbf{f}_1 = \nabla^2 f \quad [\mathbf{t} \mathbf{f}_1] = 0 \quad \text{div } \mathbf{d} = \mathbf{t} \times \mathbf{f}_1 = \Delta f = \Omega f$$

donc

$$\mathbf{f}_1 = \Omega f \cdot \mathbf{t} \quad \nabla \mathbf{d} = \Omega f \cdot \mathbf{t}^2$$

$$\nabla^2 \mathbf{d} = \mathbf{t}^2 \nabla \Omega f - \overline{\Omega f}^2 (\mathbf{d} \mathbf{t} + \mathbf{t} \mathbf{d}) \mathbf{t}$$

$$\Delta \mathbf{d} = (\mathbf{t} \times \nabla \Omega f) \mathbf{t} - \overline{\Omega f}^2 \mathbf{d} = \nabla \Omega f - (\mathbf{d} \times \nabla \Omega f + \overline{\Omega f}^2) \mathbf{d}$$

le coefficient de  $\mathbf{d}$  dans la dernière expression étant la courbure totale du  $ds^2$ , d'où enfin

$$[\mathbf{d} \cdot \Delta \mathbf{d}] = \mathbf{t} \times \nabla \Omega f = [\nabla f \cdot \nabla \Omega f] .$$

<sup>1</sup> Nous rappelons les relations

$$\nabla F = F' \nabla f \quad \Delta F = F'^2 \Delta f \quad \nabla^2 F = F'' \overline{\nabla f}^2 + F' \nabla^2 f \quad \Delta F = F'' \Delta f + F' \Delta f$$

$$\Omega F = \frac{F''}{F'^2} + \frac{1}{F'} \Omega f \quad \nabla \Omega F = \left\{ -\left(\frac{1}{F'}\right)'' + \left(\frac{1}{F'}\right)' \Omega f \right\} \nabla f + \frac{1}{F'} \nabla \Omega f$$

les accents indiquant les dérivées par rapport à  $f$ .



C'est là l'invariant  $I_0$  de  $\varpi_0$ ; c'est aussi le seminvariant  $I_1$  pour  $ds^2 = d\sigma_0^2$ , mais pour un autre  $ds^2$ , soit  $ds'^2$ , pour lequel les symboles seraient accentués, on aurait

$$I_0 = \frac{[\nabla' f \cdot \nabla' \Omega f]}{\Delta' f} = \frac{I_1'}{\Delta' f}$$

21. Résumons, en modifiant un peu leur forme, certains des résultats précédemment obtenus; si l'on part d'une forme de Pfaff quelconque  $\varpi$ , on peut lui associer, au moyen d'un facteur intégrant  $\nu_0$ , la forme intégrable

$$\varpi_0 = \nu_0 \varpi = df$$

à laquelle est associée le  $d\sigma_0^2$  canonique

$$d\sigma_0^2 = 4f_u f_v du dv = \varpi_0^2 + (\varpi_{1i})_0^2 = df^2 + \frac{1}{q^2} dg^2$$

avec

$$g_u = -iqf_u \quad g_v = iqf_v.$$

Sur ce  $d\sigma_0^2$ , les intégrales  $f = \text{const.}$  sont des courbes parallèles et l'on a, pour les premiers invariants de  $\varpi_0$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_0 = \Omega f = -\mathcal{O}_0 \log q = q \frac{\partial}{\partial f} \left( \frac{1}{q} \right) \\ -k_0 = \mathcal{O}_0 D_0 + D_0^2 = q^2 \frac{\partial^2}{\partial f^2} \left( \frac{1}{q} \right) \\ -I_0 = -\mathcal{E}_0 D_0 = q \frac{\partial^2 \log q}{\partial f \partial g} \end{array} \right. \quad (95)$$

en accord avec les formules (87) et (90), où  $p = \frac{1}{q}$ . Différentes conséquences, d'ailleurs connues, peuvent en être déduites, suivant la nature de la fonction  $q$  de  $f, g$ .

Dans le cas où, à côté de la forme  $\varpi$ , est donné un  $ds^2$ , on peut associer à  $\varpi$ , au moyen d'un facteur semi-normant  $\nu_1$ , la forme semi-normale

$$\varpi_1 = \nu_1 \varpi \quad \nu_1 = \frac{W}{2\sqrt{P}}$$

pour laquelle le  $d\sigma_1^2$  canonique se confond avec le  $ds^2$

$$d\sigma_1^2 = ds^2 = \varpi_1^2 + \varpi_{1i}^2.$$

Comme nous l'avons établi, les invariants de la forme  $\varpi_1$  sont les invariants euclidiens (géodésiques) de l'équation  $\varpi = 0$ . Avec les notations

$$\frac{f_u}{f_v} = Q = e^{-2i\zeta} \quad \frac{W}{2} = e^w \quad (49')$$

on peut écrire une forme semi-normale

$$\varpi_1 = \frac{W}{2} \left( \sqrt{\frac{f_u}{f_v}} du + \sqrt{\frac{f_v}{f_u}} dv \right) = e^{w-i\zeta} du + e^{w+i\zeta} dv . \quad (96)$$

## VII. FAISCEAUX ISOTHERMES.

22. Il est bien connu, dans la représentation conforme des surfaces, qu'à côté des deux faisceaux formés par les deux séries de lignes minima,  $du = 0$  et  $d\nu = 0$ , les faisceaux isothermes de courbes sont aussi conservés; l'équation différentielle  $\varpi = 0$  d'un tel faisceau du premier ordre est en effet caractérisée par la condition invariante

$$I = 0$$

et l'équation  $\varpi = 0$  n'a alors aucun invariant conforme. Nous avons donné bien des formes à l'invariant  $I$  de  $\varpi$ ; considérons en particulier une forme semi-normale  $\varpi_1$  sur un  $ds^2$  et rappelons diverses interprétations de l'équation  $I_1 = 0$ . D'après

$$I_1 = \frac{i}{2} \Lambda \log Q = 0 \quad (97)$$

$$\frac{\partial^2 \log Q}{\partial u \partial \nu} = 0 \quad Q = \frac{A}{B} = \frac{a(u)}{b(\nu)}$$

le rapport  $\frac{A}{B}$  des coefficients de l'équation  $\varpi = 0$  est le quotient de deux fonctions arbitraires, l'une de  $u$ , l'autre de  $\nu$ ; le facteur intégrant  $\frac{a}{2A} = \frac{b}{2B}$  ramène alors à l'équation intégrable

$$\varpi_0 = \frac{1}{2} \{ a(u) du + b(\nu) d\nu \} = 0$$

et les courbes intégrales sont données par

$$f = \frac{1}{2} \{ U(u) du + V(\nu) d\nu \} = \text{const.} \quad U' = a, \quad V' = b,$$