**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Band:** 30 (1931)

**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** APPLICATION A LA REPRÉSENTATION CONFORME DES TRANSFORMATIONS A VARIABLES SÉPARÉES

**Kapitel:** XI. Deux faisceaux quadratiques de lignes.

**Autor:** Delens, P. C.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-23887

Pour une forme $*\alpha^{(2)}$ générale, pour laquelle $\Theta \neq 0$, ou $\Theta'(\mu, \tau) \neq 0$, nous avons montré que les invariants $\mu$, $\tau$, $\Phi$, $\Theta$ sont *suffisants* pour la conservation de l'équation $\alpha^{(2)} = 0$.

34. Au point de vue géométrique, nous considérons que l'équation $\alpha^{(2)} = 0$ définit un double faisceau, ou faisceau du second ordre, de lignes tracées sur une surface; l'équation $\beta^{(2)} = 0$ définit le double faisceau bissecteur du précédent, et $\varpi = 0$ est l'équation d'un faisceau simple, considéré comme premier bissecteur. Le faisceau d'équation $d\mu = 0$ est celui le long duquel l'angle d'ouverture $2\omega$ du faisceau initial est permanent: $\theta$ est l'inclinaison du faisceau $d\mu = 0$ sur le faisceau bissecteur $\varpi = 0$; dans le cas général $\Theta \neq 0$, les lignes $\omega =$ const. et les lignes $\theta =$ const. forment des faisceaux différents.

Il sera d'autre part naturel d'utiliser la représentation sur un $d^*\sigma^2$ canonique défini par

$$*W^2 = 4\mu_u\mu_v = 4*P \tag{129}$$

sur lequel les formes $*\varpi$ et $d\mu$ sont semi-normales, donc le faisceau $d\mu = 0$ un faisceau de courbes parallèles, avec $\Delta\mu = 1$.

Au point de vue de l'isothermie, on pourra distinguer les cas suivants:

1° L'invariant I de la forme $\varpi$ est nul, ou $\Lambda\varphi = 0$; le double faisceau bissecteur est alors isotherme, et nous pourrons dire que le double faisceau $\alpha^{(2)} = 0$ est *hémi-isotherme*.

2° $\Lambda\omega = 0$; avec $\mu = \cos^2 2\omega$, $\varepsilon = \Omega\mu$, on traduit facilement cette condition avec les invariants de l'équation $\alpha^{(2)} = 0$. Ceci exprime que les deux faisceaux simples appartenant à $\alpha^{(2)} = 0$ font partie d'un même ensemble $(I_1)$.

3° On a simultanément

$$\Lambda\varphi = 0 \qquad \Lambda\omega = 0\ ; \tag{130}$$

alors les faisceaux simples de l'équation $\alpha^{(2)} = 0$ font partie d'un même ensemble isotherme, comprenant aussi les faisceaux de $\beta^{(2)} = 0$; nous dirons que ces conditions (130) sont celles d'*holo-isothermie* de $\alpha^{(2)} = 0$.

## XI. Deux faisceaux quadratiques de lignes.

35. Nous avons, au Chapitre VI, considéré implicitement un double faisceau orthogonal avec les formes adjointes $\varpi$ et $\varpi_i$, et montré les

relations entre les opérateurs attachés à ces formes: $\vartheta_u$, $\vartheta_v$ et $\mathcal{D}$, $\mathcal{T}$. En particulier, l'expression (90) de I

$$-\mathrm{I} = -\frac{i}{2}\mathcal{L}\log \mathrm{Q} = \frac{1}{2}\mathcal{N}\log q$$

rappelait que, dans le cas d'isothermie des formes

$$\left\{\begin{aligned} \varpi &= x\,df = \mathrm{A}\,du + \mathrm{B}\,dv \\ \varpi_i &= y\,dg = i(-\mathrm{A}\,du + \mathrm{B}\,dv) \end{aligned}\right. \tag{67}$$

$$\mathrm{Q} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} \qquad q = \frac{x}{y}$$

on avait simultanément

$$\mathrm{Q} = \frac{a(u)}{b(v)} \qquad q = \frac{\mathrm{X}(f)}{\mathrm{Y}(g)}$$

d'où la possibilité de réduction simultanée des équations $du\,dv = 0$ et $df\,dg = 0$ à des formes $df^2 - dg^2 = 0$ et $du^2 + dv^2 = 0$.

Considérons plus généralement deux formes quadratiques $ds^2$ et $\alpha^{(2)}$ et pour montrer la symétrie des opérations vis-à-vis de ces formes, imaginons une transformation générale des variables $u$, $v$ en $\xi$, $\eta$, telle que

$$\alpha^{(2)} = \mathrm{L}\,du^2 + 2\mathrm{M}\,du\,dv + \mathrm{N}\,dv^2 = \mathrm{C}^2 d\xi\,d\eta$$

$$ds^2 = \mathrm{W}^2 du\,dv = \mathrm{E}\,d\xi^2 + 2\mathrm{F}\,d\xi\,d\eta + \mathrm{G}\,d\eta^2 .$$

Le déterminant de la transformation étant $\Delta = u_\xi v_\eta - u_\eta v_\xi$, on a les identités

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{W}^2 u_\xi v_\xi = \mathrm{E} & & -\frac{\mathrm{C}^2}{\Delta^2} v_\xi v_\eta = \mathrm{L} \\ &\mathrm{W}^2 u_\eta v_\eta = \mathrm{G} & & -\frac{\mathrm{C}^2}{\Delta^2} u_\xi u_\eta = \mathrm{N} \\ &\mathrm{W}^2 (u_\xi v_\eta + u_\eta v_\xi) = 2\mathrm{F} & & -\frac{\mathrm{C}^3}{\Delta}(u_\xi v_\eta + u_\eta v_\xi) = 2\mathrm{M} . \end{aligned}\right.$$

Aux transformations (3) des variables $u$, $v$ conservant les équations $\alpha^{(2)} = 0$, $ds^2 = 0$, correspondent des transformations de même espèce en $\xi$, $\eta$. On retrouve aussitôt l'invariant du 1^er^ ordre

$$\mu = \frac{\mathrm{M}^2}{\mathrm{LN}} = \frac{\mathrm{F}^2}{\mathrm{EG}} = \cos^2 2\omega$$

et par suite la forme invariante $d\mu$. Pour la jacobienne des formes $\alpha^{(2)}$ et $ds^2$, on a ensuite l'identité

$$\beta^{(2)} = -i(\mathrm{L}du^2 - \mathrm{N}dv^2) = \frac{i\mathrm{C}^2}{\mathrm{W}^2}(\mathrm{E}d\xi^2 - \mathrm{G}d\eta^2)$$

qui résulte de la syzygie entre deux formes quadratiques et leur jacobienne

$$(\mathrm{W}^2\alpha^{(2)} - 2\mathrm{M}\,ds^2)^2 - 4\,\mathrm{LN}(ds^2)^2 = \mathrm{W}^4\beta^{(2)2} .$$

L'équation $\beta^{(2)} = 0$ et la forme $d\mu$ étant invariantes, l'emploi des opérateurs attachés à $d\mu$ (n° 33) permet de poursuivre le calcul aussi bien avec les variables $\xi$, $\eta$ qu'avec $u$, $v$. Ainsi, à l'invariant $\tau$ de la formule (126) correspond, en variables $\xi$, $\eta$ l'invariant

$$\bar{\tau} = \frac{\mu_\xi}{\mu_\eta}\sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{E}}} = \frac{c\tau + 1}{\tau + c} \qquad \text{avec} \qquad \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 = 4\mu$$

c'est-à-dire où $c$ est la quantité

$$\sqrt{\frac{\mathrm{Q}_1}{\mathrm{Q}_2}} = e^{2i\omega}$$

de la formule (119), donc

$$\bar{\tau} = \frac{\cos(\omega - \theta)}{\cos(\omega + \theta)} \qquad (\theta = \psi - \varphi) .$$

36. Les méthodes analytiques précédentes ne nécessitent évidemment pas l'introduction des lignes minima et de la représentation conforme; elles s'appliqueront de même aux théories géométriques où un faisceau quadratique de lignes particulières jouera un rôle primordial (lignes asymptotiques, lignes de courbure, etc.), et le dernier problème que nous avons indiqué est celui de la conservation de deux faisceaux quadratiques de lignes; on sait qu'à ce problème se rattache aussi celui de la permutation de deux faisceaux quadratiques, les faisceaux du 1er ordre constituants de deux faisceaux quadratiques pouvant être répartis autrement que dans le groupement primitif. Nous n'entrerons pas dans le détail de ces problèmes.