

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 30 (1931)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Buchbesprechung:** Philipp Frank und Richard V. Mises. — Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. Band I. Mathematischer Teil. Zweite vermehrte Auflage. — Un vol. grand in-8° de xxiii-916 pages et 84 figures. Prix: broché, RM. 57; relié, RM. 62. Friedr. Vieweg und Sohn. Braunschweig. 1930.

**Autor:** Buhl, A.

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

de belles intégrales définies, les équations linéaires dans le domaine complexe.

J'insisterai encore sur les déterminants fonctionnels et leurs transformations immédiates les déterminants symboliques formés d'opérateurs de dérivations; l'avenir des théories constructives d'équations aux dérivées partielles semble être là. Mais combien ce proche avenir est heureusement préparé par une aussi grandiose exposition que celle de MM. Webster et Szegö.

A. BUHL (Toulouse).

Philipp FRANK und Richard V. MISES. — **Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik.** Band I. Mathematischer Teil. Zweite vermehrte Auflage. — Un vol. grand in-8° de xxiii-916 pages et 84 figures. Prix: broché, RM. 57; relié, RM. 62. Friedr. Vieweg und Sohn. Braunschweig. 1930.

Cette Partie mathématique publiée par le Dr Richard v. Mises, appartient à une série d'éditions d'histoire glorieuse. Ce serait le commencement de la huitième réimpression du célèbre ouvrage de Riemann-Weber sur les Equations aux dérivées partielles de la Physique mathématique. Aujourd'hui les collaborateurs sont nombreux et se sont habilement divisé le travail, ce qui éloigne toute crainte de faiblesses partielles en un exposé dont le premier volume possède déjà presque un millier de pages. Indiquons cette division par une simple énumération des Chapitres.

I. *Fonctions réelles.* G. Szegö (Königsberg). — II. *Formes linéaires.* Ph. Frank (Prague) et R. v. Mises (Berlin). — III. *Variables complexes.* K. Löwner (Prague). — IV. *Séries et produits infinis.* G. Szegö. — V. *Calcul des Variations.* C. Carathéodory (Munich). — VI. *Conditions initiales.* L. Bieberbach (Berlin). — VII. *Problèmes aux limites. Second ordre.* L. Bieberbach und R. v. Mises. — VIII. *Fonctions particulières naissant des problèmes aux limites du second ordre.* G. Szegö. — IX. *Séries qui naissent de problèmes aux limites.* G. Szegö. — X. *Problèmes aux limites particuliers.* L. Bieberbach und R. v. Mises. — XI. *Equations intégrales.* R. v. Mises. — XII. *Résolution des équations intégrales.* R. v. Mises und G. Schulz (Berlin). — XIII. *Application aux Problèmes aux limites.* R. v. Mises. — XIV. *Potentiel.* R. v. Mises. — XV. *Equations aux dérivées partielles. Conditions initiales.* H. Rademacher (Breslau) et R. Iglisch (Berlin). — XVI. *L'équation du potentiel dans le plan.* K. Löwner. — XVII. *L'équation du potentiel dans l'espace.* G. Szegö. — XVIII. *Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du second ordre.* H. Rademacher und R. Iglisch. — XIX. *Quelques problèmes particuliers sur les équations aux dérivées partielles.* H. Rademacher und E. Rothe (Breslau). — XX. *Calcul des Variations et Problèmes aux limites.* R. Courant (Göttingue).

Les noms seuls qu'on trouve — ou qu'on retrouve — dans cette liste, montrent, à nouveau, la difficulté d'une analyse quelque peu originale. Evidemment la science physico-mathématique s'impose de toutes parts. Il n'y a rien de trop beau, de trop parfait en mathématiques pour les études phénoménales et ce sont réciproquement des phénomènes de mieux en mieux observés — surtout à des échelles très différentes — qui conduisent à de nouvelles créations mathématiques.

Les cinq premiers Chapitres du volume forment une section initiale intitulée d'ailleurs: Procédés généraux. Nous ne pouvons signaler, bien à

regret, une foule de développements clairs et ingénieux. Le Chapitre V fixe particulièrement l'attention avec un Calcul des variations rapproché constamment des formes canoniques, contenant les équations de Jacobi-Hamilton, les changements de variables canoniques et nombre d'indications sur les nouvelles méthodes de la Mécanique céleste d'après Henri Poincaré. L'auteur — et quel auteur que M. Carathéodory ! — nous fait voir, de haut, les dualités de la Mécanique céleste et de la Physique mathématique.

Une seconde section, qui comprend cinq Chapitres (de VI à X inclus), est consacrée aux équations différentielles ordinaires. En VI, on commence par un examen général concernant l'existence des intégrales et ce par un bref emploi de la méthode des approximations successives; les cas élémentaires d'intégration explicite suivent promptement. Les conditions aux limites (VII), les valeurs propres, les fonctions orthogonales et la fonction de Green nées, dans l'ordre historique, à propos d'équations aux dérivées partielles, trouvent ici leur place dans l'ordre logique. En VIII, après la notion d'espace fonctionnel, on fait naître, des considérations du Chapitre précédent, les fonctions sphériques, celles de Bessel, de Hankel, ... et la riche kyrielle des polynômes de Jacobi, Laguerre, Hermite,...; en IX, ces éléments engendrent toutes les séries construites à l'instar des séries trigonométriques.

La troisième section (Chapitres XI à XIV) traite des équations intégrales et du potentiel. Elle commence par l'étude d'un curieux schème optique auquel correspond la constitution analytique d'une équation intégrale pour laquelle se pose immédiatement un problème d'inversion. La résolution générale est celle de Fredholm-Hilbert (XII) suivie de l'emploi de la série de Neumann et des procédés de Goursat et Schmidt. En XIII, nous retrouvons la fonction de Green pour le cas de deux variables. Ce n'est qu'en XIV qu'intervient le potentiel proprement dit avec ses différentes modalités physiques puis les modalités, beaucoup plus mathématiques, des problèmes de Dirichlet et de Neumann.

Enfin, la quatrième et dernière section traite des équations aux dérivées partielles en commençant par le cas linéaire du premier ordre puis par les équations quelconques en  $x, y, z, p, q$ . Quelques mots sur les méthodes de Lie, de Monge, l'intégrale complète, les caractéristiques annoncent bien des choses à retrouver ensuite dans le domaine des équations du second ordre. Retour sur les systèmes canoniques et les propriétés hamiltoniennes. Transformation de contact. L'équation de Laplace à deux variables (XVI) fait reprendre le problème de Dirichlet correspondant et conduit aux généralités de la représentation conforme. Dans l'espace (XVII) on va jusqu'aux fonctions de Mathieu et de Lamé et au théorème d'existence de Poincaré. En XVIII, la méthode classique de Riemann est suivie d'autres, moins connues, telles la méthode de Heaviside qui ne s'applique qu'à des équations à coefficients constants mais à l'aide d'opérateurs à jeu particulièrement simple. En XIX la transcendance s'accroît avec des équations telles que  $\log \Delta u = u$  ou  $\Delta \Delta u = 0$ . Enfin, en XX, le Calcul des variations reprend des droits fondamentaux avec, par exemple, le Principe d'Hamilton et sa prodigieuse puissance de synthèse.

Quant à l'impression synthétique globale que donne l'œuvre, elle est, répétons-le, d'une merveilleuse homogénéité. Les différents auteurs se sont-ils merveilleusement entendus? Est-ce la Science qui est, par nature, merveilleusement homogène? Le mieux est d'admettre qu'il peut y avoir là

quelque remarquable dualité dont des savants de premier ordre ont adroitement tiré le meilleur des partis. A. BUHL (Toulouse).

Gerhard KOWALEWSKI. — **Integralgleichungen** (Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe, Reine und angewandte Mathematik. Band 18). — Un vol. grand in-8° de 302 pages et 11 figures. Prix: broché, RM. 15; relié, RM. 16,50. Walter de Gruyter & Co. Berlin W 10 et Leipzig. 1930.

Bien que cet ouvrage soit surtout mathématique, il prend évidemment place près de ceux relevant de la Physique mathématique. Il est dédié à Edouard Study ou, plus exactement, à la mémoire de cet éminent géomètre auquel *L'Enseignement Mathématique* a consacré récemment un Eloge (1930).

Il s'agit d'une Introduction et de quatre Chapitres rédigés avec une grande cohésion. L'introduction et le premier Chapitre révèlent tout de suite l'idée fondamentale d'*opérateur*. A propos de l'équation d'Abel, de celles que donnent, par exemple, les intégrales de Fresnel et de Fourier, la série de Taylor pourvue d'une forme intégrale du reste,..., le point de vue fonctionnel est d'abord mis en évidence. On se trouve en présence d'opérateurs de nature intégrale et l'on se propose de les étudier. Alors les procédés d'inversion ne tardent pas à apparaître encadrés par une analyse aussi élégante que naturelle. C'est, sans doute, dans cet ordre d'idées que l'auteur voit en M. Volterra le véritable créateur de la théorie. Fredholm est loin d'être oublié mais sa méthode relève plutôt du brillant artifice que d'une comparaison minutieuse avec le système linéaire à  $n$  inconnues qui ne donne jamais, à la résolution que des formules linéaires et qui conserve ce caractère d'inversion quand  $n$  croît indéfiniment. Notons aussi que certaines équations de Volterra (de première espèce) se rattachent immédiatement à la théorie des matrices, donc des groupes linéaires, et que ceci nous ramène aux conceptions si bien utilisées par M. Weyl en Mécanique quantique. Quant à montrer que les opérateurs intégraux, des domaines précédents, s'allient avec des opérateurs différentiels constituant des équations différentielles, c'est encore une dualité qui se présente d'elle-même à l'esprit quand les deux classes d'opérateurs sont tant soit peu étudiées de manière convenable.

Le Chapitre II est consacré aux équations du type de Fredholm et tient, à lui seul, plus de la moitié du volume, ce qui prouve bien, encore une fois, que Fredholm n'est diminué en rien. Ses équations intégrales se distinguent de celles de Volterra par une simple limite d'intervalle d'intégration variable chez Volterra, constante chez Fredholm. Contrairement à ce que l'on pourrait croire, au premier abord, le second cas est plus épineux que le premier encore qu'il y ait aussi des opérateurs intégraux à la Fredholm avec lesquels les solutions *formelles* s'obtiennent fort esthétiquement. Seulement il faut prouver ensuite la convergence des opérations. Une seconde méthode suit de près l'introduction de déterminants dont l'ordre s'élève indéfiniment; l'aboutissement limite est alors justifié *ipso facto*. Mais le sujet est incroyablement riche, les cas d'espèces qui peuvent éclairer le cas général sont nombreux, maintes théories sont englobées ou utilisées, telles celle des « Elementarteiler » qui n'est, au fond, que l'étude d'une correspondance, entre formes fonctionnelles linéaires, avec réductions, de celles-ci, à des formes canoniques. Il est malaisé de préciser davantage alors qu'on est en présence de formules qui débordent souvent sur les marges