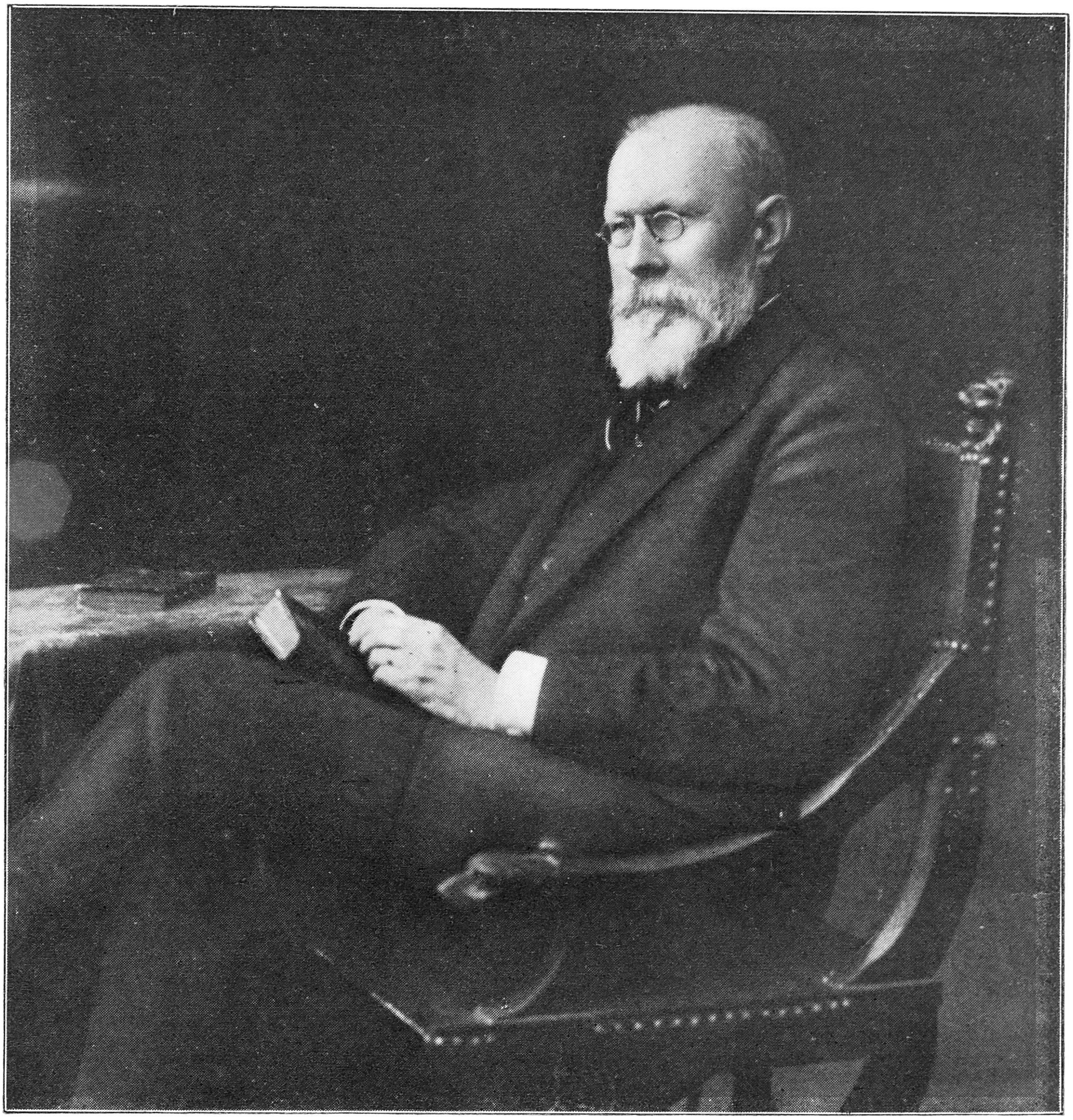

P. Appell

PAUL APPELL

Paul Appell n'est plus. Pour la seconde fois de ma vie, je ressens l'émotion poignante éprouvée, en 1912, lorsque, dans un coin tranquille des Pyrénées, j'appris la fin brusque d'un Maître de génie. Henri Poincaré venait de mourir. Que de telles intelligences disparaissent, et toute la nature semble subitement couverte d'un voile de deuil.

Certes, l'intelligence ne meurt pas. Celle des savants nous reste dans leurs ouvrages, et nous sentons que la mort ne fait que libérer de l'énergie spirituelle qui réapparaîtra en d'autres hommes, en d'autres cerveaux. Mais ce n'est là qu'une promesse imprécise, alors que la réalité présente semble nous appauvrir de la plus cruelle manière. De plus, l'homme intelligent, le savant n'est pas toujours un grand cœur comme le fut Paul Appell et, de ce côté, les regrets sont aussi d'une grandeur rarement atteinte.

Qui ne connaît les principaux titres officiels de l'homme de science. Le concours institué, en 1889, par le roi de Suède Oscar II, et où l'Ecole française triompha avec Henri Poincaré et Paul Appell, est, à coup sûr, une chose de toute première importance, mais des centaines de Mémoires, signés de ces noms illustres, s'ils n'ont pas été élaborés dans des circonstances aussi solennelles, n'en contiennent pas moins des résultats capitaux pour la Science d'aujourd'hui.

Ne serait-ce que par son *Traité de Mécanique rationnelle*, Paul Appell a véritablement joué un rôle fondamental et pro-

Cette Notice est le développement d'un article, publié par le journal *La Dépêche* (de Toulouse) le 27 octobre, et d'une Leçon inaugurale faite à la Faculté des Sciences de Toulouse le 3 novembre 1930. Par lettre du 5 décembre 1930, l'article publié dans *La Dépêche* a reçu la haute approbation de M. Nicholas Murray Butler, Président de la Fondation Carnegie pour la Paix internationale (New York).

phétique que toute la philosophie scientifique actuelle contribue à justifier. Le dix-neuvième siècle eut un culte véritablement excessif pour l'expérience. Si légitime que puisse, au premier abord, paraître un tel culte, il ne doit pas être exclusif, l'intelligence humaine étant toute autre chose qu'un simple reflet du domaine sensible. Une tragédie de Corneille ou de Racine a incomparablement plus de beauté et d'intérêt que l'exposition strictement véridique des événements magnifiés par le génie littéraire et, dans de tels cas, la morale pratique peut trouver de plus utiles enseignements chez le poète que chez l'historien. De même, en Science, il y a de merveilleuses théories dues, par exemple, à Lagrange, Hamilton, Jacobi, Riemann, Maxwell, Einstein, Louis de Broglie, qui ne manquent pas de contacts étendus et nombreux avec l'expérience, mais qui semblent devoir leur naissance plutôt aux fulgurations d'une imagination géniale qu'à l'observation aussi longue qu'attentive de faits expérimentaux. Cela, Paul Appell l'a senti et nul ne l'a montré mieux que lui. Son grand *Traité* met en évidence, dans le réel et jusque dans les problèmes les plus élémentaires, toutes les subtilités de la Mécanique analytique. S'il préparait Einstein, il le confirma ensuite dans un dernier volume rédigé en collaboration avec un disciple, M. René Thiry, Professeur à la Faculté des sciences de Strasbourg.

Henri Poincaré, Emile Picard, qui maintenant reste seul, et Paul Appell formaient une trinité glorieuse dont l'exemple eut une influence impossible à décrire sur la formation des esprits et l'éclosion d'innombrables travaux. Un adage antique veut qu'on ne puisse rien apprendre d'un maître qu'on n'aime pas. Avec Paul Appell, tout s'apprenait facilement; sa voix lente, grave, harmonieuse ne semblait pouvoir exprimer que de la beauté. Quelque étendus que fussent ses auditoires, on avait l'impression que le maître trouvait, pour chaque auditeur, le mot facile éclairant la difficulté; chacun se croyait favorisé et se sentait immédiatement reconnaissant de cette façon d'enseigner. Quand on approchait le savant de manière plus intime, on apercevait promptement toute sa valeur morale. On comprenait aussi que, sous une apparence calme, il dissimulait quelque long déchirement. C'était un patriote au sens le plus élevé du mot.

Jamais il ne prononça une parole de haine. Et cependant il était des ces Alsaciens que les Allemands, après 1870, poursuivirent avec une rigueur parfois atroce. Son frère Charles, ardent défenseur de la cause française, fut accusé par l'Allemagne de haute trahison et subit neuf ans de forteresse.

* * *

La physionomie de Paul Appell se détache aussi lumineusement sur le sombre tableau de l'affaire Dreyfus. Il manifesta sa sympathie pour les premiers artisans de la revision, le sénateur Scheurer-Kestner, l'avocat Leblois, le colonel Picquart. Quant à la fable du bordereau à écriture rythmée par une équation trouvée dans le sous-main du malheureux capitaine, qui croirait aujourd'hui à une aussi invraisemblable application de l'algèbre ? Or, à l'époque, il fallut Appell, Darboux, Poincaré pour combattre cette pauvreté. Les jeunes d'aujourd'hui ne se doutent guère de l'ombre où l'on tenta jadis de plonger leurs aînés. Singulière époque où tout un pays était égaré, où une alternative absolument objective d'innocence ou de culpabilité était compliquée des pires difficultés subjectives touchant au patriotisme, à la religion, à la science même interprétée tout de travers, époque où le terme d'intellectuel prenait une signification injurieuse.

Les esprits faux devaient être vaincus, mais nous n'en étions si sûrs que parce que nous pouvions tourner les yeux vers des maîtres que nous aimions et qui, pour nous, ne pouvaient tenir que la vraie lumière.

* * *

Le rôle de Paul Appell pendant la guerre de 1914-1918 fût encore un rôle de premier plan. La création du Secours National, a dit M. le Premier Président Payelle, remonte au premier jour de la guerre; elle fut l'œuvre de Paul Appell. Tandis que la mobilisation appelait aux frontières tous les Français en état de combattre, c'est lui qui décréta cette autre mobilisation contre les maux qui allaient fondre sur la population civile, sur les femmes, les enfants, les vieillards, privés de leur soutien. A son instigation, des hommes appartenant à tous les partis politiques, à toutes les confessions religieuses, représentatifs de toutes les autorités morales de la Nation, se groupèrent pour le seconder dans son dessein patriotique. Assemblée qui symbolisait, par la diversité même de ses éléments, l'unité de la France devant l'ennemi.

Le Comité de Secours National était fondé. Il se choisit pour président Paul Appell.

Immense était la tâche : faire sortir de terre des millions et, ces millions créés (car ils affluèrent de tous les points du pays, de toutes les parties du monde civilisé) en régler l'emploi selon leur destination sacrée: se pencher sur d'innombrables infortunes, scruter tous les visages de la misère, lutter contre la faim, le froid, le dénuement, mettre en œuvre tout ce que le génie du bien peut opposer de moyens aux puissances du mal déchaînées par la plus effroyable des catastrophes.

Homme de science et d'administration, Paul Appell apporta dans ses lourdes fonctions présidentielles l'esprit de méthode et d'organisation qui devait donner le maximum d'effets utiles au mouvement de solidarité humaine suscité par son initiative. Il y apporta son dévouement sans limite, sa ténacité alsacienne, toute sa foi, tout son cœur de Français.

Le Secours National, a dit encore M. Raymond Poincaré, a été un « miracle d'union et de charité ». Miracle qui se renouvela jour par jour, pendant les cinq années tragiques, aussi longtemps qu'il fallut secourir des détresses toujours plus nombreuses, aussi longtemps qu'il fallut maintenir les âmes à la hauteur des sacrifices qu'exigeait le salut de la Patrie.

* * *

Ces préliminaires montrent assez avec quelle facilité on pourrait magnifier le souvenir de Paul Appell sur les terrains les plus divers. Partout il créa et développa. Lorsqu'il s'agit d'analyser une telle œuvre, les pensées se pressent en foule, chacune semblant réclamer la première place dans une description qui serait simplement équitable. Essayons pourtant de faire effort pour présenter maintenant les choses de manière méthodique.

La biographie proprement dite de Paul Appell sera toujours aisée à étudier; il l'a faite lui-même dans un livre émouvant, très simplement intitulé *Souvenirs d'un Alsacien.* Mais on sent alors que d'autres voix doivent dire combien élevées furent les qualités d'âme du savant et quel exemple il laisse à ceux qui veulent puissamment agir tout en pensant dans les régions les plus hautes et les plus sereines.

Si ces voix peuvent être entendues partout, quelques-unes d'entre elles, particulièrement autorisées, retentirent à la Sorbonne le 12 juin 1927 lors de la Célébration du Cinquantenaire scientifique du Maître.

Ce fut d'abord celle de M. Charléty, Recteur de l'Académie de Paris, saluant un prédécesseur qui, pour ainsi dire, avait inauguré ces hautes fonctions, car l'Académie ne s'abritait point auparavant sous l'autorité d'un Recteur. Un Paul Appell seul semblait digne de prendre ce titre à Paris.

M. Maurain, Doyen de la Faculté des Sciences, dans une forme analogue, rendit hommage au Doyen que fut Paul Appell durant seize années.

M. Léon Guillet, Directeur de l'Ecole Centrale, parla au nom de plus de 6.000 élèves formés en 23 ans d'enseignement et M^lle^ Amieux, Directrice de l'Ecole de Sèvres, avec un charme tout féminin, peignit les débuts de Paul Appell devant des sévriennes d'abord apeurées puis émerveillées.

M. Vessiot rappela l'entrée à l'Ecole Normale, en 1873, à 18 ans, la Thèse soutenue en 1876, l'Agrégation exceptionnellement brillante, l'honneur, pour l'Ecole, d'avoir eu un tel élève.

Puis ce furent MM. Vito Volterra, au nom des savants étrangers, Bertrand de Fontviolant, pour la Société Mathématique de France, H. Fehr pour la Société mathématique suisse. Avec M. le Premier Président Payelle, nous retrouvons le discours transcrit plus haut au sujet du Secours National.

M. Prudhommeaux évoqua la Société des Nations, organisme maintenant international mais qui prit naissance en une Association française dirigée d'abord par Léon Bourgeois et Paul Appell. Ce fut l'occasion de rappeler ce qui fût dit par ce dernier, le 13 juillet 1920 à la distribution des prix du Lycée de Reims. Une nouvelle guerre serait une guerre de machines et d'engins scientifiques si formidables que vainqueurs et vaincus seraient également détruits; ce serait un suicide pour l'Humanité. Paroles prophétiques, couramment répétées par la presse de notre époque, devant les menaces que la France voit parfois venir de l'extérieur.

M. le Général Dubail, Grand Chancelier de la Légion d'Honneur, distinguait aussi, en Paul Appell, cet amour du fait objectivement établi et interprété à la lumière des circonstances qui ont entouré sa production.

M. Emile Picard remit à Paul Appell la médaille frappée à son effigie, tout en rappelant encore des souvenirs de jeunesse et d'Ecole Normale. Henri Poincaré, à ce moment, n'était-il pas là, en quelque présence invisible et merveilleuse.

M. Painlevé, après avoir évoqué, une fois de plus, une grandiose œuvre scientifique, reprit des souvenirs de la guerre. Il montra Paul Appell, alors qu'en août 1914 l'invasion allemande déferlait sur Paris, restant à son poste de Président du Secours National. Comme frère de Charles Appell, il était plus menacé qu'un autre et il connaissait mieux que qui que ce soit la barbarie que les Allemands étaient capables de déployer. Mais la consigne qu'il avait acceptée lui semblait sacrée. Quelle plus belle fin, répondit-il, que d'être fusillé pour une telle cause !

On sait qu'à ces touchantes manifestations Paul Appell ne put matériellement répondre; il s'en excusa en quelques mots prononcés d'une voix faible et blanche et ce fut son fils Pierre qui lut quelques pages pleines de reconnaissance émue [1]. Depuis il allait s'affaiblissant, éprouvant, pour parler, une difficulté de plus en plus grande, mais attentif cependant aux lectures qui lui étaient faites. Il s'éteignit assez soudainement, le 24 octobre 1930.

Puisse Madame Paul Appell et toute la famille de l'illustre défunt trouver, dans le glorieux souvenir de celui-ci, dans les présentes lignes, comme dans tant d'autres parues et à paraître, le commencement d'une consolation. Celui qui sert d'exemple est toujours lumière.

---

[1] Pour tout ce qui concerne le *Cinquantenaire scientifique de Paul Appell*, voir le fascicule spécial publié par *Les Presses universitaires de France*, 1927. Voir aussi *L'Enseignement mathématique*, t. XXVI, 1927, p. 5.

*
* *

Nous ne tenterons pas ici une véritable analyse des travaux scientifiques de Paul Appell. Elle devrait être trop sommaire pour avoir quelque valeur. Mentionnons seulement qu'une telle analyse peut être appuyée sur deux fondements principaux. D'abord la *Biographie et Bibliographie analytique des Ecrits de Paul Appell* publiées dans les *Savants du jour* par Ernest Lebon, en 1910. Ensuite une *Notice sur les Travaux scientifiques de Paul Appell* publiée par lui-même, en 1925, au tome 45 des *Acta mathematica.*

L'exposé dû à Ernest Lebon est de grand intérêt au point de vue biographique; au point de vue bibliographique ce n'est guère qu'une nomenclature de titres de Mémoires, titres d'ailleurs fort bien classés. C'est sans doute pour remédier au caractère assez sec de cette nomenclature que Paul Appell publia sa *Notice* des *Acta*, en laquelle on trouve, pour chaque travail, une explication sommaire de son esprit, du résultat obtenu et même de la genèse de l'œuvre. Ce dernier trait a une importance capitale chez l'illustre auteur. J'ai toujours eu peu de goût, écrit-il, pour le développement des théories générales et j'ai plutôt recherché les questions précises et limitées pouvant ouvrir des voies nouvelles. En d'autres termes, il y a apologie de la question nettement posée, née même, en des circonstances auxquelles il est facile de se référer. Ce qu'il faut ajouter c'est qu'avec des points de départ simples, Paul Appell s'élevait à des généralités si étendues qu'elles pourraient être enviées par beaucoup de constructeurs de théories dites générales parfois bien prématurément.

Le succès, le retentissement des méthodes et de leur exposé pédagogique éloigne aussi de nouveaux exposés descriptifs. Ne serait-il pas absurde d'avoir l'air de découvrir le *Traité de Mécanique.* Nous parlions déjà, au début de cette Notice, du caractère prophétique de ce livre. Or ce caractère demeure. Ce *Traité* est toujours un ouvrage d'avenir. On connaît l'adjuration de Poincaré: « N'essayez pas de comprendre quelque chose aux Mécaniques nouvelles, si vous ne connaissez pas très bien la

Mécanique classique ». Or, Paul Appell nous apprend la Mécanique classique sous une forme éminemment propre à la transition. Pour un système à un nombre quelconque de degrés de liberté, il introduit le

$$ds^2 = a_{ij}\,dq_i\,dq_j\ ,$$

ce qui n'est autre chose que la conception de l'espace de Riemann. Pour passer de là aux Théories d'Einstein, que faut-il ? Simplement passer du premier ordre au second, en introduisant la *courbure* du dit espace.

Le *Traité* nous présente de même les méthodes de Jacobi établies d'abord pour le cas d'un seul point matériel. On pouvait croire, à l'origine, qu'il y avait surtout là un souci d'exposition simple dans un cas particulièrement réduit. Aujourd'hui, nous avons une Mécanique ondulatoire qui tente d'identifier l'équation de Jacobi et le Principe d'Huyghens mais qui n'y réussit d'une manière absolument et surtout physiquement claire que dans le cas du mouvement d'un point unique. L'étude du Chapitre, écrit il y a plus de trente ans, s'impose maintenant comme objet d'actualité. Il est inutile d'insister davantage sur l'énergie d'accélérations qui nous livra une nouvelle Mécanique différentielle du second ordre et sur le volume consacré aux Figures d'Equilibre d'une masse fluide en rotation, volume générateur de travaux modernes tels ceux de M. Pierre Humbert.

En des Ouvrages d'Analyse tout aussi classiques, Paul Appell sut faire transparaître ses grandes productions originales. Le Mémoire *Sur les fonctions à multiplicateurs*, couronné par le roi de Suède Oscar II, se retrouve en grande partie dans les *Principes de la Théorie des Fonctions elliptiques* publiés avec E. Lacour et dont une seconde et récente édition est due à M. R. Garnier. C'est la fonction entière σ, de Weierstrass, qui sert de point de départ et c'est bien là un type primordial de fonction à multiplicateurs puisqu'elle se reproduit, multipliée par un facteur exponentiel, quand la variable varie de 2ω ou de $2\omega'$. Le cas général des multiplicateurs est traité dans les derniers chapitres.

On peut faire des remarques analogues pour la *Théorie des Fonctions algébriques et de leurs intégrales* écrite en collaboration avec M. E. Goursat et continuée maintenant, en une seconde édition, par P. Fatou, géomètre encore fort jeune dont il faut aussi, très malheureusement, déplorer la perte récente. Un tel ouvrage succède à celui que Briot consacra aux Fonctions abéliennes. Il utilise les surfaces de Riemann dont l'usage en Analyse, à la fin du siècle dernier n'était pas sans soulever quelques défiances très comparables à celles soulevées, plus récemment, par les espaces de Riemann. Et cependant la surface à feuillets multiples, avec son *genre* ou, si l'on préfère, ses différents modes de connexion, est une image de la fonction algébrique dont la valeur n'a jusqu'ici été surpassée par aucune autre. Paul Appell, dans l'ouvrage en litige, et M. Emile Picard dans son *Traité d'Analyse* ont été d'abord seuls en France à défendre cette cause sur le terrain didactique. Les extensions, la surface à une infinité de feuillets donnèrent ensuite des procédés généraux d'études pour fonctions multiformes quelconques, un lien s'établissant alors avec l'uniformisation générale de ces fonctions par emploi des transcendantes fuchsiennes de Poincaré. C'est aussi dans cet ordre d'idées que nous rencontrons des travaux extrêmement étendus sur les généralisations des fonctions sphériques, des polynomes d'Hermite, des fonctions de Bernoulli, bref de toutes ces transcendantes qui se rattachent à des équations différentielles ou aux dérivées partielles, du second ordre, à coefficients rationnels ou même simplement algébriques, transcendantes dont le prototype est la série hypergéométrique. Pour Henri Poincaré toutes ces fonctions étaient de nature fuchsienne, mais il est clair qu'on peut précisément les étudier sous un aspect relativement simple en tentant de les reconstruire à partir d'équations différentielles dont beaucoup correspondent à des problèmes physiques et qui sont, en tout cas, plus immédiatement représentables que des développements concernant les groupes fuchsiens. On peut ici comprendre admirablement l'esprit de Paul Appell déclarant préférer la voie d'accès précise à la théorie générale bâtie dans l'abstrait. Mais, comme nous le disions plus haut, la voie d'accès, de largeur d'abord bien limitée, s'élargit promptement et finit en théorie générale.

Quant aux recherches se dirigeant vers la moderne Théorie des Fonctions, elles sont des plus intéressantes et donnent d'élégantes images. Ici se placent les développements en série d'une fonction holomorphe dans une aire A limitée par des arcs de cercle dont les centres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont tous *extérieurs* à A. Le développement est de la forme

$$f(x) = \sum\sum \frac{A_\nu^k}{(x - a_k)^\nu}$$

avec l'indice k variant évidemment de 1 à n cependant que ν varie de 1 à l'infini. Et, chose très curieuse, la série ainsi construite est identiquement nulle dans la région indéfinie du plan extérieure à tous les cercles considérés.

Le théorème de Mittag-Leffler sur la représentation des fonctions méromorphes par des séries de fractions rationnelles a été étendu et étudié, sur les surfaces de Riemann, par Weierstrass et Paul Appell. Les éléments des développements sont alors des intégrales abéliennes de seconde espèce *paramétriquement rationnelles* aux points d'infinitude. Ces intégrales abéliennes permettent aussi l'extension de l'intégrale de Cauchy.

En de tels domaines les recherches sont toujours étroitement liées avec celles dues à Henri Poincaré et à M. Emile Picard. Elles reviennent rapidement vers une analyse supérieure à propriétés exactes quand, par exemple, on construit des fonctions de deux variables à deux paires de périodes, des expressions triplement ou quadruplement périodiques. Si variées que soient ces considérations, elles ne semblent pas, au premier abord, pouvoir éclairer complètement le champ des équations différentielles toujours susceptibles d'être logiquement construites de telle manière que leurs intégrales ne relèvent d'aucune propriété exacte formulée à l'avance et ceci explique la naissance d'une autre école, représentée, en France, surtout par MM. E. Borel, J. Hadamard, P. Painlevé, qui commença à s'occuper de propriétés fonctionnelles approchées. Mais le précédent domaine des propriétés exactes n'en est pas moins indéfiniment étendu; il se complique, en s'étendant, de variables auxiliaires, de paramètres, d'affixes de points singuliers ou remarquables, bref d'éléments par rapport auxquels peuvent naître une infinité de systèmes différentiels suffisamment plastiques pour pouvoir s'identifier, sinon exactement du moins aussi approximativement qu'on voudra, avec des systèmes donnés à l'avance. On n'est pas ici dans le monde de la construction méthodique, faite à partir de principes, mais dans celui de la découverte et il est clair qu'il restera toujours à découvrir dans cet ordre d'idées. Certes les difficultés sont croissantes; on hésite à reprendre tous les résultats dus à un Appell, à un Picard, à un Poincaré pour découvrir au delà et le fait de chercher du plus immédiatement accessible, en d'autres voies, a fait surgir bien des choses de grande valeur. Néanmoins, il reste toujours, dans les travaux antérieurs, une prodigieuse harmonie qu'on peut trouver insuffisamment perpétuée.

Il semble bien que l'Institut de France se range à cet avis lorsqu'il publie les Œuvres de Poincaré, Hermite, Halphen, Humbert et qu'il semblera s'y ranger encore lorsque, comme il est très probable, il publiera celles de Paul Appell. Il ne s'agit point de bâtir de simples monuments du souvenir, mais de réattirer l'attention sur des temps héroïques, d'ailleurs peu éloignés, où la Science avait une valeur trop parfaitement esthétique pour que cette valeur puisse cesser de s'imposer, de nos jours, à une admiration féconde.

* * *

La fécondité de ces méthodes analytiques se confirme d'ailleurs dans le domaine des variables réelles. Dans l'espace ordinaire, partagé en parallélépipèdes contigus et identiques, Paul Appell construisit des fonctions harmoniques à trois groupes de périodes. Les parallélépipèdes P sont comparables aux parallélogrammes ou plutôt aux rectangles du champ complexe sur l'ensemble desquels on étudierait une fonction doublement périodique. En tous les points homologues des P, la fonction harmonique reprend la même valeur. Celle-ci se construit effectivement comme les fonctions elliptiques se construisent à partir de la fonction Z (u) qui n'est pas doublement périodique; on a, dans le nouveau problème, une fonction auxiliaire Z (x, y, z) telle que

$$Z(x+a, y+b, z+c) - Z(x, y, z) = Ax + By + Cz + E\ .$$

Il y a des simplifications remarquables lorsque les parallélépipèdes se réduisent à des cubes. Dans le cas général, la fonction

$Z(x, y, z)$ peut servir à décomposer en éléments simples toute fonction harmonique aux périodes a, b, c. On voit que l'analogie avec les fonctions elliptiques se maintient partout. Si l'on fait croître indéfiniment une ou deux périodes il n'en reste plus que deux ou une et l'on retrouve des cas particuliers déjà introduits en Physique mathématique par Boussinesq, de Saint-Venant, Flamant, Chervet et même par Riemann dans une théorie des anneaux de Nobili.

* * *

A part les généralités, déjà signalées, où l'étude des équations différentielles linéaires est à rapprocher de celle des fonctions fuchsiennes, il existe d'importants travaux de Paul Appell sur les fonctions algébriques entières d'intégrales distinctes appartenant aux équations en question. Quand ces équations sont à coefficients algébriques, on peut montrer quelles sortes de singularités sont associables à ces coefficients pour que les équations primitives puissent se partager en trois espèces analogues aux trois espèces d'intégrales abéliennes.

Des équations différentielles linéaires peuvent être transformables en elles-mêmes. Leur construction se rattache à l'équation fonctionnelle.

$$F[\varphi(z)] = A\,\psi(z)\,F(z)$$

étudiée, dans des cas particuliers, par Abel, Schröder, Korkine et M. G. Kœnigs. Il y a aussi de certaines équations pseudo-linéaires à intégrale générale de la forme.

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n \ ,$$

les constantes C étant liées algébriquement. Enfin les transformations d'équations linéaires ne vont pas sans *invariants*, fonctions des coefficients que la transformation laisse inaltérées. Important contact avec Lie, Sylvester, Halphen.

Les équations aux dérivées partielles pourraient d'abord nous faire revenir sur les équations hypergéométriques à deux variables. C'est aussi dans ce domaine que l'on doit à Paul Appell des résultats extrêmement élégants concernant les équations

$$(x - y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - \beta'\frac{\partial z}{\partial x} + \beta\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \ ,$$

et

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0 .$$

La première, étudiée d'abord par Riemann à propos de propagation ondulatoire, joue un rôle géométrique très étendu dans le grand Ouvrage de Gaston Darboux sur la *Théorie des Surfaces* (t. II). Il faut encore insister ici sur une transformation de l'équation en elle-même, transformation qui dépend de quatre paramètres arbitraires. Pour la seconde équation il existe quelque chose d'analogue; elle appartient aussi au monde physique, quant à la propagation de la chaleur, tout en intervenant dans des questions géométriques telles que la détermination de surfaces dont un système de lignes asymptotiques se projette sur une famille de courbes planes donnée. La facilité avec laquelle on trouve des solutions de l'équation puis la possibilité de transformer celles-ci en d'autres plus générales, conduisent évidemment à des extensions géométriques de problèmes simples tel celui du conoïde quelconque dont les asymptotiques se déterminent immédiatement et sans quadrature. D'autre part, les asymptotiques de conoïdes sont des courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire. Ces courbes ont précisément fait l'objet de la Thèse de Paul Appell. Elles nous conduisent, on le voit, à la partie géométrique de son œuvre en nous permettant de bien remarquer avec quelle aisance tout s'y enchaîne, les enchaînements pouvant même prendre des formes multiples susceptibles d'être aperçues de différents points de vue.

On peut encore rappeler ici que les années 1928 et 1929 du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, dirigé par M. Henri Villat, sont dédiées à Paul Appell et à Emile Picard. Les articles renfermés dans ces volumes ne concernent pas tous, de manière directe, des travaux dûs aux deux illustres géomètres, mais le signataire de ces lignes, sous le titre *Lignes asymptotiques et lignes de courbure*, a précisément tenu à revenir sur leurs Thèses de Doctorat. On trouvera ainsi, dans l'exposé en question, un aperçu plus développé sur les rapprochements signalés dans les lignes précédentes.

* * *

Le plus beau problème géométrique étudié par Paul Appell se rapporte très probablement à la Théorie des déblais et remblais. Cette expression n'est pas très heureuse et, chez des géomètres non prévenus, a pu impliquer des idées de terrassements, de poussées des terres, de résistance des matériaux. Vraiment on est loin de tout ceci et le problème est charmant qui peut s'énoncer comme suit. *Deux volumes équivalents étant donnés, les décomposer en parcelles infiniment petites et deux à deux équivalentes, se correspondant suivant une loi telle que, si l'on multiplie le chemin parcouru par chaque parcelle, transportée sur celle qui lui correspond, par le volume de cette parcelle, la somme des produits ainsi obtenus soit un minimum.*

La question présente des analogies remarquables avec le Problème de Plateau, c'est-à-dire la détermination de la surface minimum passant par un contour donné. Quand le déblai et le remblai sont des aires homogènes équivalentes, situées sur une sphère de centre O, les routes de transport sont normales à une surface telle que, sur chaque normale, le point O se projette au milieu du segment déterminé par les deux centres de courbure principaux. Ces surfaces ont une équation aux dérivées partielles du second ordre, facile à former et rappelant, en un peu plus compliqué, celle des surfaces minima. Sous le nom de *Surfaces d'Appell*, elles ont maintenant toute une littérature; leur étude a été reprise, avec diverses extensions, notamment par MM. Edouard Goursat et Emile Turrière.

L'involution, telle qu'elle est systématiquement exposée par Chasles, consiste en une correspondance entre deux éléments géométriques, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2, telle que

$$A\lambda_1\lambda_2 + B(\lambda_1 + \lambda_2) + C = 0 .$$

Paul Appell associe des éléments, de paramètres λ_1, λ_2, λ_3, trois à trois, la correspondance respectant la relation

$$A\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + B(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2) + C(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + D = 0 .$$

Ceci permet une théorie remarquablement intuitive des cubiques gauches. La notion d'involution d'ordre n suit aisément et donne, pour des variétés quelconques, une géométrie d'intersections analogue à celle qui a ses fondements analytiques dans le théorème d'Abel. Nouvelle arche d'alliance, particulièrement lumineuse, entre l'Analyse et la Géométrie.

* * *

Paul Appell a consacré les dernières années de sa vie à réexposer, de manière particulièrement élégante et accessible, une grande partie des précédentes merveilles. Il fut le principal collaborateur du *Mémorial des Sciences mathématiques*, fondé en 1925 par M. Henri Villat. Il en rédigea quatre fascicules [1].

Bien que nous insistions peu, ici, sur les travaux de Mécanique, tant le grand *Traité* les a fait connaître, tant ils ont peu besoin d'être paraphrasés, il nous faut cependant mentionner que le premier de ces fascicules *Sur une forme générale des équations de la Dynamique* a précisément trait aux *Équations d'Appell*, à ces équations qui s'appliquent aussi bien aux systèmes holonomes qu'aux systèmes non holonomes correspondant, par exemple, à des cas de roulement tant soit peu généraux.

Le second fascicule: *Séries hypergéométriques de plusieurs variables, polynomes d'Hermite et autres fonctions sphériques de l'hyperespace*, se rapporte à ces vastes extensions de la série hypergéométrique de Gauss déjà signalées plus haut.

Le troisième sur *Le Problème géométrique des déblais et remblais* expose la question d'une manière très brève et le quatrième, *Sur la décomposition d'une fonction méromorphe en éléments simples* reprend l'étude des principales formes de fonctions à pôles sur le plan ordinaire et sur la surface de Riemann. Ces quatre fascicules sont de véritables petits joyaux pouvant préparer, de la façon la plus heureuse, l'accès aux grands Mémoires.

La Délégation française à la Commission Internationale de l'Enseignement mathématique avait trouvé en Paul Appell un Président d'Honneur. C'est à ce titre qu'il prit la parole, le 2 avril 1914, à la séance d'ouverture de la Conférence Internationale présidée par Gaston Darboux.

---

[1] Ces fascicules ont été analysés, en détail, dans *L'Enseignement mathématique* (1925, p. 335, 337; 1928, p. 162; 1929, p. 150).

Ses occupations ne lui ont pas permis de faire partie de la Commission, mais il a donné maintes preuves de l'intérêt qu'il portait à ses travaux.

* * *

Peut-être resterait-il à insister encore sur l'œuvre administrative et pédagogique de Paul Appell. Il semble bien qu'il n'y ait pas eu de ce côté de véritable recherche quant à des sciences administrative ou pédagogique. Je crois bien que l'existence de ces sciences était plutôt niée. La confiance en les titres multiples, accumulés par examens et même par concours, était fort médiocre. La première chose à considérer était la Science tout court mais avec un grand S. Quand on pouvait s'assimiler cette Science là, de manière suffisamment étendue, on comprenait naturellement ses exigences matérielles et l'on pouvait prétendre à bien administrer; on comprenait aussi comment elle devait être présentée à l'esprit des élèves et l'on pouvait prétendre à bien enseigner.

Ce sont surtout des idées de ce genre qui ont été défendues par Paul Appell. On en trouve trace en maint endroit des *Notices et Discours* publiés, sous le titre *Education et Enseignement*, en 1922.

Dans ce livre nous trouvons, par exemple, une biographie d'Ossian Bonnet, esprit géométrique très pur et très élevé, qui devait cependant donner, à l'Ecole Polytechnique, un excellent Directeur d'Etudes. Charles Hermite est présenté, de même, comme un merveilleux professeur qui, très probablement, ne s'est jamais proposé d'apprendre à enseigner. Avec de Freycinet nous trouvons l'apologie, en Géométrie, de la méthode d'observation directe. Quant aux efforts de réduction du nombre des postulats, ils sont peu utiles, pour ne pas dire nuisibles, au point de vue pédagogique. Surtout il ne faut jamais songer à acquérir ou à enseigner la Science sous une forme qui dispense de revenir en arrière, et l'on se demande avec étonnement comment des esprits cependant éminents ont pu défendre, jusque dans des Congrès, une pareille conception. Il faut aller de l'avant, dans les directions qui intéressent; si l'on rencontre quelque difficulté, il faut pouvoir examiner à nouveau les points de départ et il n'y a même pas de meilleure méthode pour se rendre compte finalement du rôle, du caractère bien ou mal fondé, des postulats.

A la distribution des Prix du Lycée Saint-Louis, en 1904, Paul Appell dit encore des choses toujours dignes d'être méditées. La jeunesse s'instruit en prenant trop l'habitude de s'appuyer uniquement sur les cours. On dirait que l'imprimerie n'est pas inventée. Dans ces conditions, l'esprit d'initiative ne se développe pas suffisamment.

Lors d'une Réception des Universités françaises par l'Université de Londres (juin 1906) nous trouvons, dans un important discours, bien des vues chères à Paul Appell et sur lesquelles tous les esprits éminents sont d'accord. Un établissement scientifique, dit-il, dont les professeurs se consacreraient uniquement à l'exposé de la Science que d'autres ont faite, serait voué à une décadence rapide. Seuls les Maîtres qui ont fait et qui font des travaux personnels, des recherches originales, comprennent et connaissent à fond les méthodes propres à chaque science, peuvent donner la vie à un enseignement même élémentaire et communiquer à leurs élèves cet esprit de curiosité scientifique, de recherche passionnée de la vérité, en dehors de tout profit et de toute application, qui constitue le véritable savant.

Un autre discours, prononcé le 3 août 1910, à Clermont-Ferrand, au Congrès de l'Association française, revient encore sur la définition du savant. Ce n'est pas l'homme qui sait mais l'homme qui découvre et construit. Une prodigieuse patience et un grand esprit d'initiative doivent être ses qualités principales.

Henri Poincaré et Gaston Darboux disparaissant ont encore fourni à Paul Appell l'occasion d'éloquentes glorifications s'adressant à la fois aux géomètres et aux méthodes. Maintenant qu'il disparaît lui-même, ceux qu'il a formés ne manqueront pas de le glorifier aussi. Ses lumineux enseignements semblent demeurer tout proches, ne jamais exiger de fatigante recherche dans une œuvre cependant des plus vastes. Avec lui, la Science, la justice, l'autorité même, quand elle était nécessaire, s'acceptaient comme des disciplines intuitives dépourvues de tout heurt et ramenant toujours à un minimum les frictions qui causent tant d'incompréhensions et de conflits. Les nations, comme les hommes, ont besoin de tels modèles.

A. Buhl (Toulouse).