

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 30 (1931)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR CERTAINS VOLUMES ALGÈBRIQUES
Autor: Papillon, Pierre
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-23889>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 08.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR CERTAINS VOLUMES ALGÈBRIQUES

PAR

Pierre PAPILLON, Prof. au Lycée (Mulhouse).

§ 1. — A diverses reprises ¹, G. HUMBERT appliquait à la Géométrie le théorème d'Abel, calculant, entre temps ², quelques aires sphériques; vingt ans après ³, M. A. BUHL était amené à reprendre ces questions et les complétait par de fort intéressantes recherches sur les volumes.

Nous nous proposons d'étudier systématiquement ces sommes abéliennes de volumes à parois latérales cylindriques, coniques ou conoïdales; de curieuses associations se découvrent ainsi entre la sphère, par exemple, et des surfaces d'apparences très différentes, voire même entre des courbes planes.

Nombreux sont les développements auxquels se prêtent les formules générales; mais peut-être serait-il fastidieux, et partant maladroit, d'en user indéfiniment.

1. VOLUMES A PAROIS CYLINDRIQUES.

§ 2. — *Expression générale.* — Une cloison σ étant prise sur une surface (s) , un cylindre de base σ découpe sur une surface algébrique (S) , sans relation nécessaire avec (s) , un certain nombre de plages Σ_i qui limitent, avec un plan de section droite (P) , autant de volumes V_i ; proposons-nous d'évaluer la somme ΣV_i .

¹ *Journal de Mathématiques*, 4^{me} série: tomes III (1887), V (1889) et VI (1890).

² 1888.

³ *Annales de la Faculté de Toulouse*, 3^{me} série: tomes II, VI et VII.

Soient μ , M_i , m les points de (P), Σ_i et σ sur une même normale au plan de base,

$$\rho_i = \frac{\overline{PM_i}}{\overline{Pm}} ,$$

α , β , γ les cosinus directeurs de la normale en m à (s), enfin

$$F(X, Y, Z) = 0$$

l'équation, algébrique, de (S).

1. Rapportons l'espace à un trièdre trirectangle dont la face xOy coïncide avec (P).

Il est évident que

$$\Sigma V_i = \int_{\sigma} \int (\Sigma Z_i) \gamma d\sigma ,$$

avec, (x, y, z) désignant les coordonnées de m ,

$$Z_i = \rho_i \cdot z ,$$

$$F(x, y, \rho_i z) = 0 .$$

Bref

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma V_i = \int_{\sigma} \int (\Sigma \rho_i) z \gamma d\sigma , \\ \text{avec} \\ F(x, y, \rho_i z) = 0 . \end{array} \right.$$

Si l'on ordonne d'ailleurs le polynôme entier F par rapport aux puissances décroissantes de Z ,

$$F \equiv Z^p \varphi(X, Y) + Z^{p-1} \psi(X, Y) + Z^{p-2} \Theta(X, Y) + \dots$$

il vient

$$\boxed{\Sigma V_i = \int_{\sigma} \int - \frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)} \gamma d\sigma} \quad (1)$$

2. Dans le cas général où le plan (P) admet pour équation

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z - d = 0 ,$$

λ, μ, ν , désignant des cosinus directeurs,

$$\begin{aligned} V_i &= \int_{\sigma} \int \overline{PM}_i (\lambda \alpha + \mu \beta + \nu \gamma) d\sigma . \\ &= \int_{\sigma} \int \rho_i \cdot \overline{Pm} (\lambda \alpha + \mu \beta + \nu \gamma) d\sigma . \end{aligned}$$

Or

$$\overline{Pm} = \lambda x + \mu y + \nu z - d$$

et

$$X_i = x + \lambda (\rho_i - 1) (\lambda x + \mu y + \nu z - d) ,$$

$$Y_i = y + \mu (\dots) (\dots) ,$$

$$Z_i = z + \nu (\dots) (\dots) ,$$

$$F(X_i, Y_i, Z_i) = 0 .$$

Bref

| | |
|---|-----|
| $\left\{ \begin{array}{l} \Sigma V_i = \int_{\sigma} \int (\Sigma \rho_i) (\lambda x + \mu y + \nu z - d) (\lambda \alpha + \mu \beta + \nu \gamma) d\sigma \\ \text{avec} \\ F(x + \lambda \dots, y + \mu \dots, z + \nu \dots) = 0 \end{array} \right.$ | (2) |
|---|-----|

§ 3. — Reprenons l'expression (1). Les cloisons Σ_i étant au nombre de p , si σ se trouve située sur la surface (s_0) d'équation

$$- \frac{\psi(x, y)}{p\varphi(x, y)} = z ,$$

ou

$$pz\varphi(x, y) + \psi(x, y) = 0 ,$$

il vient

$$\begin{aligned} \Sigma V_i &= \int_{\sigma} \int pz \gamma d\sigma \\ &= p \int_{\sigma} \int z \gamma d\sigma ; \end{aligned}$$

les volumes V_i ont donc pour moyenne arithmétique le volume cylindrique de même nature que limite la cloison σ .

A (S) se trouve donc associée la surface (s_0) particulière: lieu du point de coordonnées $\left(x, y, \frac{\sum Z_i}{p}\right)$, c'est-à-dire du barycentre des points M_i isomassifs — centre des moyennes distances —; c'est la surface conjuguée de la direction $z'z$ relative à la surface donnée. De là ce théorème qui lie simplement celui d'Abel à la théorie des polaires:

Les volumes que détermine un cylindre sur une surface algébrique ont pour moyenne arithmétique celui que ce même cylindre découpe sur la surface conjuguée de la direction des génératrices relativement à la surface donnée.

Lorsqu'en particulier le coefficient $\psi(x, y)$ est nul — il en est ainsi, en particulier, quand xOy est un plan de symétrie pour (S) — la somme abélienne l'est également: la surface conjuguée est le plan xOy .

Plus généralement, si

$$\frac{\psi}{\varphi} = \frac{ax + by - h}{c}$$

la surface conjuguée est plane et le volume moyen est celui d'un tronc cylindrique élémentaire; les surfaces (S) ont pour équation

$$Z^p (aX + bY + cZ - h)\varphi(X, Y) + Z^{p-2}\Theta(X, Y) + \dots = 0.$$

§ 4. — *Cas des quadriques.* — Si, dans l'équation précédente, $p = 2$, nous obtenons pour surfaces (S) les quadriques; directement, à l'aide de

$$AX^2 + \dots + 2BXY + \dots + 2CX + \dots + D = 0,$$

il vient

$$\varphi \equiv A'' ,$$

$$\psi \equiv 2(B'x + By + C'') :$$

l'équation de (s_0) ,

$$B'x + By + A''z + C'' = 0 ,$$

est celle du plan diamétral conjugué de la direction $z'z$:

Les volumes que détermine un cylindre sur une quadrique ont pour moyenne arithmétique celui que ce même cylindre découpe sur le plan diamétral conjugué de la direction des génératrices.

§ 5. — *Cas des cyclides.* — Prenons les cyclides d'équation

$$(X^2 + Y^2 + Z^2)^2 - 4h(AX^2 + BY^2 + CZ^2) - 4k^2(aX + bY + cZ) \pm l^4 = 0 .$$

Pour utiliser l'expression (2), formons l'équation en ρ

$$\rho^4(\lambda x + \mu y + \nu z - d) + 4d\rho(\lambda x + \dots - d)^3 + \dots ,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \Sigma V_i &= 4 \int_{\sigma} \int -d(\lambda \alpha + \mu \beta + \nu \gamma) d\sigma ; \\ &= -4d \int_{\sigma} \int (\lambda x + \mu \beta + \nu \gamma) d\sigma ; \end{aligned}$$

le volume moyen est celui que le même cylindre découpe sur le plan de base et le plan "parallèle mené par l'origine. Ce résultat remarquable est celui que donnerait une sphère centrée à cette origine.

§ 6. — Il est immédiat de constater que la surface (s_0) ne dépend pas du plan (P): lui substituer, en effet, un plan (P') revient à ajouter ou à retrancher à V_i le volume d'un tronc cylindrique, donc à la moyenne $\frac{\Sigma V_i}{p}$ ce même volume.

§ 7. — *Noyau cylindrique.* — Analogue à la question des sommes abéliennes est celle des noyaux cylindriques, relative aux surfaces (S)

$$Z^2\varphi(X, Y) + Z\psi(X, Y) + \Theta(X, Y) = 0 .$$

Le volume de ce noyau, dont les génératrices sont parallèles à $z'z$, a pour expression

$$N = \int_{\sigma} \int |\varrho_2 - \varrho_1| z\gamma d\sigma .$$

Et comme

$$|\varrho_2 - \varrho_1| = \sqrt{\left(\frac{z\psi}{z^2\varphi}\right)^2 - 4 \cdot \frac{\Theta}{z^2\varphi}} .$$

il vient

$$N = \int_{\sigma} \int \frac{\sqrt{\psi^2 - 4\varphi(\Theta)}}{\varphi} \gamma d\sigma \quad (3)$$

Si l'on trace σ sur la surface (s_1) d'équation

$$\frac{\sqrt{\psi^2 - 4\varphi(\Theta)}}{\varphi} = z ,$$

ou

$$z^2 \varphi^2(x, y) + 4\varphi \cdot \Theta - \psi^2 = 0 ,$$

le volume du noyau est celui du cylindre de même nature que limite (s_1) . Ici (P) ne joue aucun rôle.

Considérons alors une quadrique à centre; rapportons-la au diamètre parallèle aux génératrices du cylindre et au plan conjugué¹, en sorte que son équation s'écrive

$$AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + \varepsilon = 0 \quad (\varepsilon = \pm 1) .$$

Ici

$$\begin{aligned} \varphi &\equiv A'' , & \psi &\equiv 0 , \\ \Theta &\equiv Ax^2 + A'y^2 + \varepsilon , \end{aligned}$$

et (s_1) a pour équation

$$z^2 \cdot A''^2 + 4A''(Ax^2 + A'y^2 + \varepsilon) = 0 ,$$

ou

$$Ax^2 + A'y^2 + \frac{A''}{4} z^2 \frac{A''}{4} z^2 + \varepsilon = 0 ;$$

c'est la transformée de la quadrique (S) par la dilatation $\mathcal{O}(xOy, z'z, 2)$.

En particulier, à la sphère

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2$$

correspond l'ellipsoïde de révolution allongé

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} + \frac{z^2}{4R^2} - 1 = 0 .$$

¹ Les axes de coordonnées ne sont plus rectangulaires; mais les intégrales donnent des expressions proportionnelles aux volumes.

2. — VOLUMES A PAROIS CONIQUES.

§ 8. — *Expression générale.* — Substituons au cylindre un cône et calculons ΣV_i .

Soient M_i, m les points de Σ_i et de σ sur une même droite issue du sommet du cône,

$$\varrho_i = \frac{\overline{OM}_i}{Om} ,$$

α, β, γ les cosinus directeurs de la normale en m à (s) .

Rapportons l'espace à un trièdre trirectangle ayant pour sommet celui du cône; il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma V_i = \int_{\sigma} \int \frac{1}{3} (\Sigma \varrho_i^3) (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma \\ \text{avec} \\ F(\varrho_i x, \varrho_i y, \varrho_i z) = 0 . \end{array} \right.$$

Si l'on ordonne d'ailleurs F par rapport aux puissances décroissantes de XYZ ,

$$F \equiv \Phi_m(X, Y, Z) + \Phi_{m-1}(X, Y, Z) + \Phi_{m-2}(X, Y, Z) + \dots + \Phi_0 ,$$

il vient

$$\Sigma V_i = \frac{1}{3} \int_{\sigma} \int \left(-\frac{\Phi_{m-1}^3}{\Phi_m^3} + 3 \frac{\Phi_{m-1} \Phi_{m-2}}{\Phi_m^2} - 3 \frac{\Phi_{m-3}}{\Phi_m} \right) (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma$$

(4)

§ 9. — Tout d'abord, la parenthèse

$$-\frac{\Phi_{m-1}^3}{\Phi_m^3} + 3 \dots - 3 \dots ,$$

étant homogène et d'ordre — 3, peut être égalée à la somme

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} ;$$

dès lors, c désignant le contour de σ ,

$$\Sigma V_i = \int_c \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ F & G & H \end{vmatrix} .$$

D'autre part, toute modification laissant invariante la même parenthèse n'altère point ΣV_i , et ceci permet un grand nombre d'associations entre surfaces (S); en particulier, si

$$\Phi_{m-1}^3 - 3\Phi_m \Phi_{m-1} \Phi_{m-2} + 3\Phi_m^2 \Phi_{m-3} = 0 ,$$

les sommes précédentes sont nulles.

Nous n'aborderons pas le développement de ces questions; M. A. Buhl a défriché ce terrain dans les quatrième et cinquième Mémoires précités ¹.

§ 10. — Lorsque σ appartient à la surface (s_0) d'équation

$$\frac{1}{m} \left(- \frac{\Phi_{m-1}^3}{\Phi_m^3} + 3 \frac{\Phi_{m-1} \Phi_{m-2}}{\Phi_m^2} - 3 \frac{\Phi_{m-3}}{\Phi_m} \right) = 1 ,$$

ou

$$m \Phi_m^3 + 3 \Phi_m^2 \Phi_{m-3} - 3 \Phi_m \Phi_{m-1} \Phi_{m-2} + \Phi_{m-1}^3 = 0 ,$$

il vient

$$\Sigma V_i = m \int_{\sigma} \int \frac{1}{3} (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma ;$$

les volumes V_i ont donc pour moyenne arithmétique le volume conique de même nature que limite la cloison σ ; cette surface (s_0) est généralement de degré $3m$.

§ 11. — *Volume cylindro-conique.* — Prenons pour (S) un cylindre circulaire dont nous pouvons toujours prendre l'équation sous la forme

$$F \equiv (X - a)^2 + Y^2 - R^2 = 0 .$$

¹ Pages 317-327; 195-204. Voir aussi *Géom. et Analyse Int. doubles*, pp. 8 et 30.

En cette hypothèse

$$\Phi_m \equiv x^2 + y^2 ,$$

$$\Phi_{m-1} \equiv - 2ax ,$$

$$\Phi_{m-2} \equiv a^2 - R^2 ,$$

$$\Phi_{m-3} \equiv 0 ;$$

(s₀) a donc pour équation

$$2(x^2 + y^2)^3 + 6(x^2 + y^2)ax(a^2 - R^2) - 8a^3x^3 = 0 ,$$

soit finalement ¹

$$(x^2 + y^2)^3 - ax[(a^2 + 3R^2)x^2 - 3(a^2 - R^2)y^2] = 0 .$$

C'est un cylindre dont la base, sextique tricirculaire, possède au sommet du cône un point triple.

1° $a > R$ (sommet du cône intérieur au cylindre).

Les trois branches passant à l'origine sont réelles, les tangentes en ce point ayant pour coefficients angulaires respectifs

$$\infty , \quad \pm \sqrt{\frac{a^2 + 3R^2}{3(a^2 - R^2)}} .$$

La courbe rencontre $x'x$ au point d'abscisse

$$\sqrt[3]{a(a^2 + 3R^2)} ;$$

ce point est du reste intérieur à la circonférence directrice

$$(x - a)^2 + y^2 - R^2 = 0 .$$

¹ En coordonnées polaires

$$\rho^3 = a[3R^2 \cos \theta + a^2 \cos 3\theta] .$$

Les valeurs maximum et minimum de ρ sont acquises pour

$$\theta = 0$$

et, pour

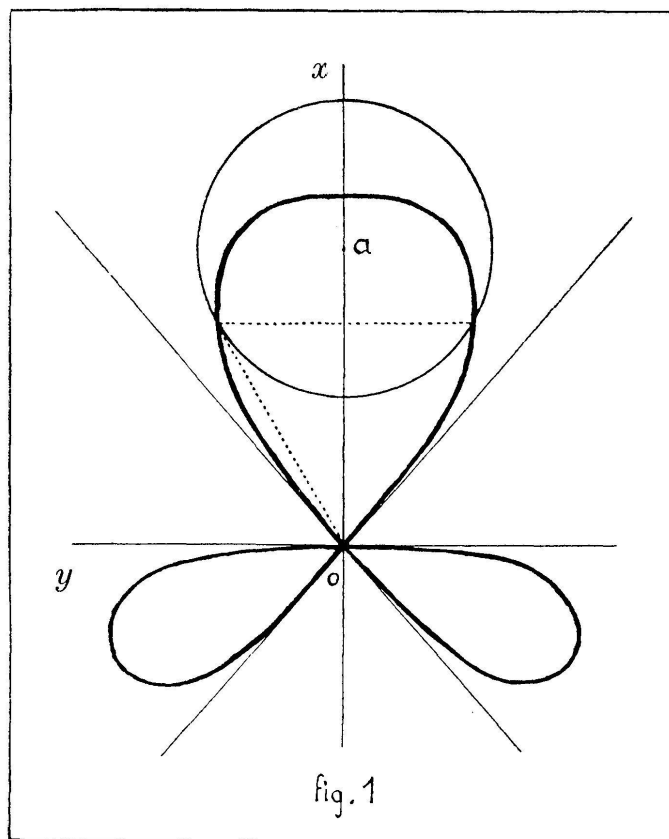
$$\sin \theta = \pm \frac{\sqrt{3a^2 + R^2}}{2a} \quad \text{et alors} \quad \rho = -\sqrt{a^2 - R^2} ,$$

avec

$$a > R .$$

Enfin, sextique et circonférence se coupent aux points de coordonnées (fig. 1)

$$\left(a - \frac{R^2}{a}, \quad \pm \frac{R}{a} \sqrt{a^2 - R^2} \right).$$



2. $a < R$ (sommet du cône intérieur au cylindre).

La branche tangente en 0 à l'axe $y'y$ est seule réelle; la sextique est intérieure à la circonférence (fig. 2).

§12. — *Volume sphéro-conique.* — Prenons pour (S) la sphère d'équation

$$(X - a)^2 + Y^2 + Z^2 - R^2 = 0 ;$$

l'équation de (s_0) s'obtient en substituant $y^2 + z^2$ à y^2 dans les calculs du paragraphe précédent; soit.

$$(x^2 + r^2)^3 - ax[(a^2 + 3R^2)x^2 - 3(a^2 - R^2)r^2] = 0$$

avec

$$r^2 = y^2 + z^2 .$$

Ainsi (s_0) n'est autre que la surface de révolution d'axe $x'Ox$ ayant pour méridienne la sextique déjà étudiée.

§ 13. — Si, en résumé, nous associons à la circonférence

$$(x - a)^2 + y^2 - R^2 = 0$$

la sextique

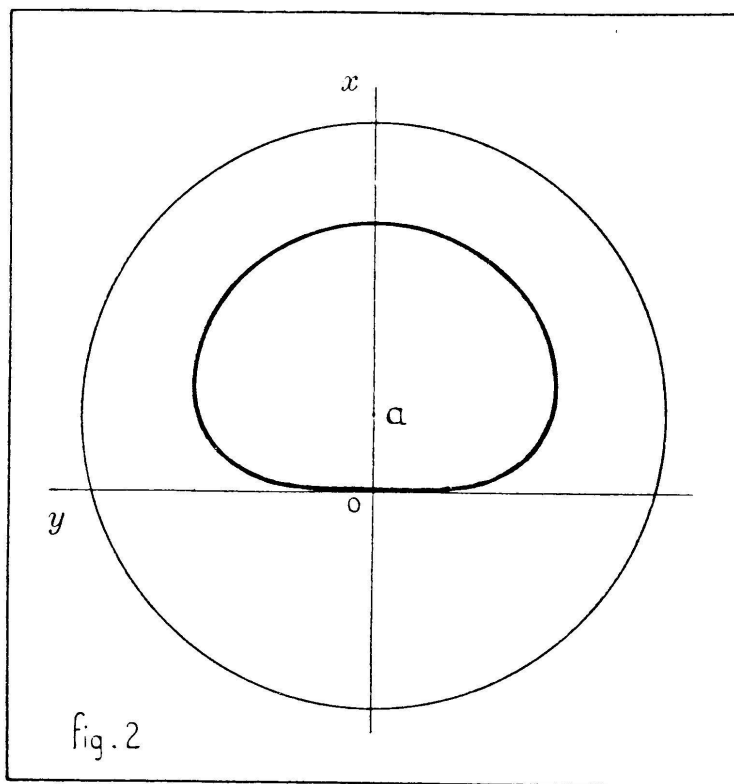
$$(x^2 + y^2)^3 - ax[(a^2 + 3R^2)x^2 - 3(a^2 - R^2)y^2] = 0 ,$$

un cône de sommet O découpe :

1° Sur les cylindres droits admettant ces courbes pour directrices,

2° Sur les surfaces d'axe Ox admettant ces courbes pour méridiennes

des cloisons Σ_1 et Σ_2 d'une part, une cloison σ d'autre part, telles que le dernier volume conique soit la moyenne des deux premiers.



§ 14. — Pour les surfaces (S) de révolution

$$az^2 + br^2 - 1 = 0 ,$$

$$(z^2 + r^2)^2 - (a^2 z^2 \pm b^2 r^2) = 0 ,$$

$$(z^2 + r^2 - 2ar)^2 - b^2(z^2 + r^2) = 0 ,$$

à méridienne conique, ovale de Cassini, limaçon de Pascal, les surfaces (s_0) sont les mêmes :

$$(z^2 + r^2)^3 - z(Az^2 + Br^2) = 0 .$$

De là une association possible de méridiennes fort différentes; nous n'insisterons pas sur la détermination de ces méridiennes associées.

3. — VOLUMES A PAROIS CONOÏDALES.

§ 15. — *Expression générale.* — Substituons enfin au cylindre un conoïde droit et calculons ΣV_i .

Soient, l'axe conoïdal étant confondu avec $z'z$, μ , M_i , m les points de $z'z$, de Σ_i et de σ sur une même parallèle au plan xOy

$$\rho_i = \frac{\overline{\mu M_i}}{\mu m} ,$$

α , β , γ les cosinus directeurs de la normale en m à (s) .

Il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma V_i = \int_{\sigma} \int \frac{1}{2} (\Sigma \rho_i^2) (\alpha x + \beta y) d\sigma , \\ \text{avec} \\ F(\rho_i x, \rho_i y, z) = 0 . \end{array} \right.$$

Si l'on ordonne d'ailleurs F par rapport aux puissances décroissantes de XY ,

$$F \equiv \Lambda_q(X, Y, Z) + \Lambda_{q-1} + \dots$$

Λ_i étant homogène et de degré i en XY , il vient

$$\Sigma V_i = \frac{1}{2} \int_{\sigma} \int \left(\frac{\Lambda_{q-1}^2}{\Lambda_q^2} - 2 \frac{\Lambda_{q-2}}{\Lambda_q} \right) (\alpha x + \beta y) d\sigma \quad (5)$$

§ 16. — Posons

$$\Lambda = \frac{\Lambda_{q-1}^2}{\Lambda_q^2} - 2 \frac{\Lambda_{q-2}}{\Lambda_q} ;$$

appliquons à l'intégrale double la formule de Stokes

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\sigma} \int \Lambda(x, y) d\sigma = \int_c P dx + Q dy \\ \text{avec} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \Lambda y \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = -\Lambda x \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} . \end{array} \right.$$

Introduisant la fonction K , homogène et de degré -2 par rapport à xy , telle que

$$\Lambda = \frac{\partial K}{\partial z} ,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} P &\equiv y[K + \Omega(x, y)] \\ Q &\equiv -x[K + \Omega(x, y)] \end{aligned}$$

Ω étant une fonction arbitraire, homogène et de degré -2 ; dès lors

$$\Sigma V_i = \frac{1}{2} \int [K + \Omega] (y dx - x dy)$$

Si donc σ appartient à une surface (s_1) d'équation

$$\begin{aligned} K(x, y, z) + \Omega(x, y) &= h , \\ \Sigma V_i &= h \sigma_2 ; \end{aligned}$$

la somme des volumes équivaut au volume cylindrique de hauteur h et dont la base est la projection de σ sur xOy .

Lorsqu'en particulier (S) est un cylindre à génératrices parallèles à $z'z$,

$$K = \Lambda z$$

et les surfaces (s_1) ont pour équation

$$\Lambda z + \Omega = h ,$$

car Λ ne renferme pas la variable z .

A toute surface algébrique (S) peut être attachée une famille de surfaces (s_1) telles qu'un contour σ y tracé donne un conoïde pour lequel la somme des volumes limités aux différentes cloisons

Σ_i qu'il découpe sur (S) soit équivalente au volume d'un cylindre droit de hauteur constante ayant pour base la projection de σ sur le plan directeur du conoïde.

Ces surfaces ne dépendent que des trois premiers termes de l'équation de (S), ordonnée suivant les puissances décroissantes de XY :

$$\Lambda_q(X, Y, Z) + \Lambda_{q-1}(X, Y, Z) + \dots + \Lambda_0 = 0 .$$

§ 17. — Surfaces (s_1) attachées au cylindre circulaire

$$(X - a)^2 + Y^2 - R^2 = 0 .$$

Dans le cas actuel

$$\Lambda_q \equiv x^2 + y^2 , \quad \Lambda_{q-1} \equiv -2ax , \quad \Lambda_{q-2} \equiv a^2 - R^2 ,$$

et

$$\Lambda \equiv \frac{4a^2x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{a^2 - R^2}{x^2 + y^2} ;$$

l'équation générale de (s_1) s'écrit, tous calculs faits,

$$(x^2 + y^2)^2 - \frac{2z}{h} [(R^2 + a^2)x^2 + (R^2 - a^2)y^2] + \Theta(x, y) = 0 ,$$

Θ étant homogène et de degré + 2.

En supposant nulle cette dernière fonction, s'obtient la surface (s'_1) particulière

$$(x^2 + y^2)^2 - \frac{2z}{h} [(R^2 + a^2)x^2 + (R^2 - a^2)y^2] = 0 ,$$

ou, en coordonnées cylindriques

$$z = \frac{h}{2} \frac{r^2}{a^2 \cos 2\theta - R^2} .$$

Or, la quartique bicirculaire

$$(x^2 + y^2)^2 - (Ax^2 + By^2) = 0$$

est la podaire centrale de la conique

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - 1 = 0 :$$

(s'_1) est donc le lieu des podaires centrales des coniques

$$\frac{x^2}{2 \frac{z}{h} (R^2 + a^2)} + \frac{y^2}{2 \frac{z}{h} (R^2 - a^2)} - 1 = 0$$

sections du paraboloid

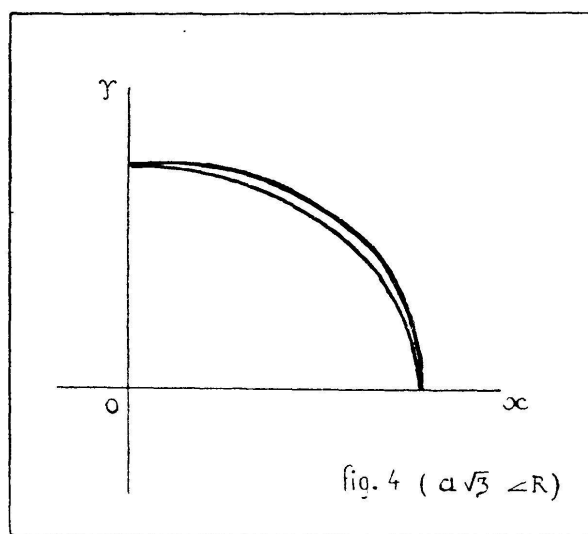
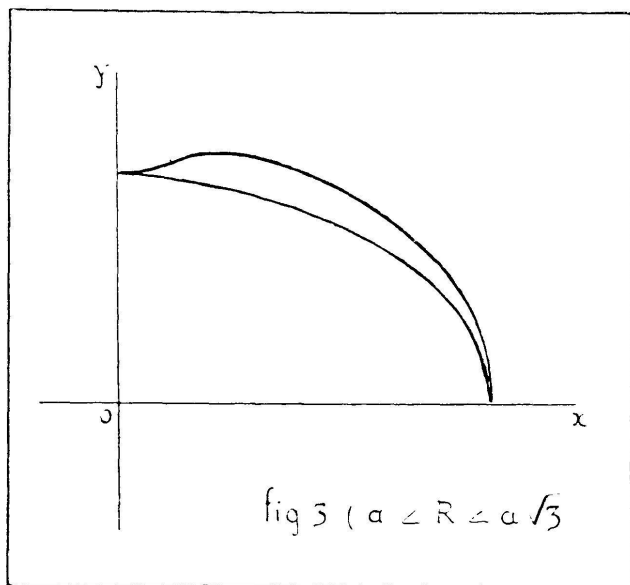
$$2z = \frac{x^2}{\frac{R^2 + a^2}{h}} + \frac{y^2}{\frac{R^2 - a^2}{h}}$$

par les plans normaux à son axe.

1. $R > a$ (axe conoidal intérieur au cylindre).

Le paraboloid est elliptique, les coniques de section sont des ellipses.

Les deux formes des podaires sont reproduites dans les figures 3 et 4.



2. $R = a$ (axe conoidal génératrice du cylindre).

Il n'y a plus qu'une seule cloison Σ ; ce cas doit donc être écarté.

3. $R < a$ (axe conoidal extérieur au cylindre).

Le paraboloid est hyperbolique, les coniques de section sont des hyperboles; les podaires ont un point double au centre de ces hyperboles.

Lorsque, dans le premier cas, a est nul — l'axe conoidal est celui

du cylindre et les deux volumes conoïdaux partiels sont équivalents — la surface (s'_1) se réduit au paraboloidé de révolution

$$x^2 + y^2 - 2 \frac{R^2}{h} z = 0 ;$$

une vérification partielle serait très aisée.

§ 18. Surfaces (s_1) attachées à la sphère.

$$(X - a)^2 + Y^2 + Z^2 - R^2 = 0 .$$

Ici

$$\Lambda \equiv \frac{4 a^2 x^2}{(x^2 + y^2)^2} - 2 \frac{z^2 + a^2 - R^2}{x^2 + y^2}$$

et les surfaces (s_1) ont pour équation, calculs effectués,

$$\begin{aligned} 3 [4 a^2 x^2 - 2 (x^2 + y^2) (a^2 - R^2)] z - 2 z^3 (x^2 + y^2) \\ - 3 h (x^2 + y^2)^2 + \Theta (x, y) = 0 ; \end{aligned}$$

Θ étant homogène et de degré 2.

En supposant nulle cette fonction, on obtient la surface particulière (s'_1) d'équation

$$2 z^3 (x^2 + y^2) + 3 h (x^2 + y^2)^2 - 6 z [(R^2 + a^2) x^2 + (R^2 - a^2) y^2] = 0 .$$

Ecrivons-la

$$(x^2 + y^2)^2 - \frac{2 z}{h} \left[\left(R^2 + a^2 - \frac{z^2}{3} \right) x^2 + \left(R^2 - a^2 - \frac{z^2}{3} \right) y^2 \right] = 0 ;$$

(s'_2) apparaît comme le lieu des podaires centrales des coniques, sections parallèles à xOy de la surface

$$\frac{x^2}{2 \frac{z}{h} \left(R^2 + a^2 - \frac{z^2}{3} \right)} + \frac{y^2}{2 \frac{z}{h} \left(R^2 - a^2 - \frac{z^2}{3} \right)} - 1 = 0 .$$

Remarquons que ces coniques ont pour lieux de leurs sommets les paraboles semi-cubiques

$$y = 0 \quad x^2 = 2 \frac{z}{h} (R^2 + a^2) - \frac{2 z^3}{3 h}$$

et

$$x = 0 \quad y^2 = 2 \frac{z}{h} (R^2 - a^2) - \frac{2 z^3}{3 h} ;$$

dans le cas des sections elliptiques ($R < a$), ceci peut servir de définition à ces anti-podaires.

§ 19. — Reprenons l'assertion évidente qui permet d'associer diverses surfaces (S): toute modification des Λ_i , donc de (S), qui n'altère point Λ n'altère point ΣV_i .

Nous donnerons deux exemples.

1. Cylindres associés au cylindre circulaire

$$(X - l)^2 + Y^2 - a^2 = 0 .$$

Nous avons trouvé

$$\Lambda \equiv \frac{4l^2 x^2}{(x^2 + y^2)^2} - 2 \cdot \frac{l^2 - a^2}{x^2 + y^2} .$$

Substituons à la base circulaire l'ovale de Cassini

$$[(X - l)^2 + Y^2]^2 \mp b^2(X - l)^2 - a^2 Y^2 = 0$$

ou le limaçon de Pascal

$$[(X - l)^2 + Y^2 - 2a(X - l)]^2 - b^2[(X - l)^2 + Y^2] = 0 ;$$

il vient respectivement

$$\Lambda \equiv \frac{16l^2 x^2}{(x^2 + y^2)^2} - 2 \cdot \frac{2l^2(3x^2 + y^2) \mp b^2 x^2 - a^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

et

$$\Lambda = \frac{16(a + l)^2 x^2}{(x^2 + y^2)^2} - 2 \cdot \frac{2l^2(3x^2 + y^2) + 4a(a + 2l)x^2 - b^2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} .$$

Dans ces trois cas, Λ est donc de la forme

$$2 \cdot \frac{Ax^2 + By^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

et les cylindres peuvent être convenablement associés; la surface (s'_1) attachée à cet ensemble

$$(x^2 + y^2)^2 - 2 \frac{z}{h} (Ax^2 + By^2) = 0$$

est le lieu des podaires centrales des sections normales à l'axe du paraboloidé

$$\frac{x^2}{\left(\frac{A}{h}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{B}{h}\right)} - 2z = 0 .$$

2. Surfaces de révolution associées à la sphère

$$(X - l)^2 + Y^2 + Z^2 - a^2 = 0 .$$

Nous avons trouvé

$$\Lambda \equiv \frac{4l^2 x^2}{(x^2 + y^2)^2} - 2 \frac{z^2 + l^2 - a^2}{x^2 + y^2} .$$

Substituons à la méridienne circulaire du plan xOy une conique ou un ovale de Cassini d'axe parallèle à $z'z$; nous obtenons les surfaces de révolution

$$a[(X - l)^2 + Y^2] + bZ^2 - 1 = 0$$

et

$$[(X - l)^2 + Y^2 + Z^2]^2 \mp b^2[(X - l)^2 + Y^2] - a^2 Z^2 = 0$$

dont l'axe est parallèle à l'axe conoïdal. Il vient respectivement

$$\Lambda \equiv \frac{4l^2 x^2}{(x^2 + y^2)^2} - 2 \frac{al^2 + bz^2 - 1}{x^2 + y^2}$$

et

$$\Lambda \equiv \frac{16l^2 x^2}{(x^2 + y^2)^2} - 2 \frac{2l^2(3x^2 + y^2) \mp b^2(x^2 + y^2) + 2z^2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} .$$

Dans les trois cas Λ est donc de la forme

$$2 \cdot \frac{Ax^2 + By^2 + Cz^2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} ;$$

les surfaces peuvent être convenablement associées; la surface (s'_1) attachée à cet ensemble,

$$(x^2 + y^2)^2 - 2 \frac{z}{h} (Ax^2 + By^2) - 2 \frac{Cz^3}{3h} (x^2 + y^2) = 0 ,$$

ou

$$(x^2 + y^2)^2 - 2 \frac{z}{h} [(A + Dz^2)x^2 + (B + Dz^2)y^2] = 0$$

est le lieu des podaires centrales des sections normales à l'axe de la surface cubique

$$\frac{x^2}{\frac{2z}{h}(A + Dz^2)} + \frac{y^2}{\frac{2z}{h}(B + Dz^2)} - 1 = 0 .$$

Ces coniques ont pour lieu des sommets les paraboles semi-cubiques

$$\begin{aligned} y = 0 & \quad z^2 = 2 \frac{z}{h} (A + Dz^2) \\ x = 0 & \quad y = 2 \frac{z}{h} (B + Dz^2) ; \end{aligned}$$

dans les cas des sections elliptiques ceci peut servir de définition aux anti-podaires car les deux paraboles sont réelles.

§ 20. — Reprenons l'expression (7) et supposons σ tracée sur la surface (s_0) d'équation

$$\frac{1}{q} \left(\frac{\Lambda_{q-1}^3}{\Lambda_q^3} - 2 \frac{\Lambda_{q-2}}{\Lambda_q} \right) = 1 ,$$

ou

$$q \Lambda_q^2 + 2 \Lambda_q \Lambda_{q-2} - \Lambda_{q-1}^2 = 0 ;$$

il vient

$$\Sigma V_i = q \int \int_{\sigma} \frac{1}{2} (\alpha x + \beta y) d\sigma :$$

les volumes V_i ont pour moyenne arithmétique le volume conoïdal de même nature que limite la cloison σ .

Lorsqu'en particulier (S) est un cylindre dont les génératrices sont parallèles à $z'z$, (s_0) est un cylindre; le degré de sa directrice plane est $2q$.

§ 21. — *Volume cylindro-conoïdal.* — Prenons pour équation du cylindre circulaire (S)

$$F \equiv (X - a)^2 + Y^2 - R^2 = 0 .$$

En cette hypothèse

$$\Lambda_q \equiv x^2 + y^2$$

$$\Lambda_{q-1} \equiv -2ax$$

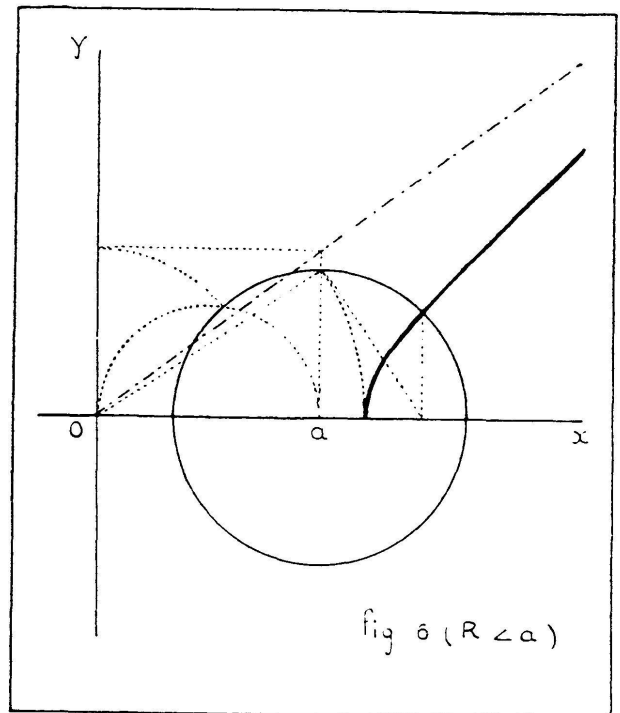
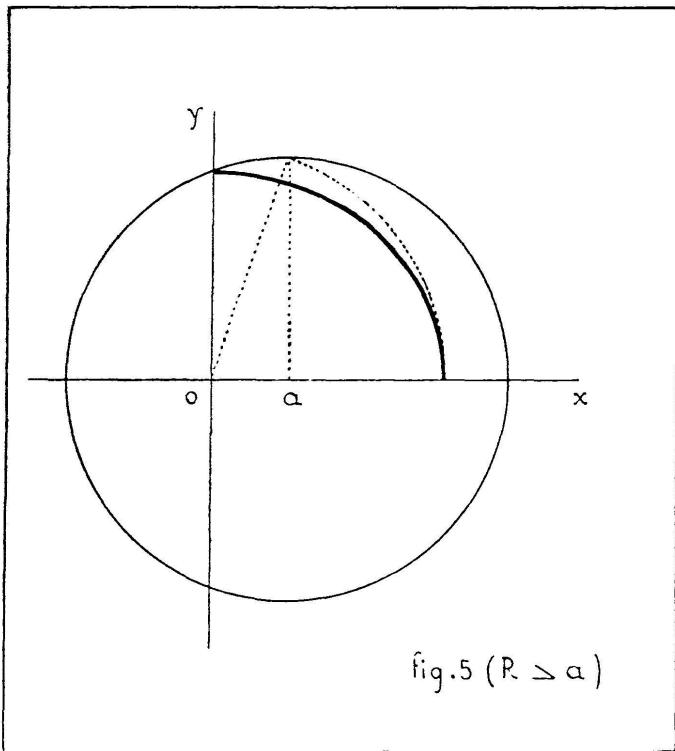
$$\Lambda_{q-2} \equiv a^2 - R^2 .$$

(s_0) a pour équation

$$(x^2 + y^2)^2 - [(R^2 + a^2)x^2 + (R^2 - a^2)y^2] = 0 ;$$

la directrice de ce cylindre est la podaire centrale de la conique

$$\frac{x^2}{R^2 + a^2} + \frac{y^2}{R^2 - a^2} - 1 = 0 ;$$



ellipse ou hyperbole selon que R est supérieur ou inférieur à a , c'est-à-dire que l'axe conoïdal est intérieur ou extérieur au cylindre donné.

§ 22. — *Volume sphéro-conoïdal.* — Dans le cas de la sphère

$$(X - a)^2 + Y^2 + Z^2 - R^2 = 0$$

on obtiendra pour (s_0) la surface d'équation

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (R^2 + a^2)x^2 - (R^2 - a^2)y^2 = 0 .$$

Sous la forme

$$(x^2 + y^2)^2 - [(R^2 + a^2 - z^2)x^2 + (R^2 - a^2 - z^2)y^2] = 0$$

nous la reconnaissons comme le lieu des podaires centrales des sections, normales à l'axe conoïdal, de la surface

$$\frac{x^2}{R^2 + a^2 - z^2} + \frac{y^2}{R^2 - a^2 - z^2} - 1 = 0 .$$

Ces sections sont d'ailleurs des coniques à centre dont les sommets décrivent les circonférences

$$\begin{aligned} y = 0 & \quad x^2 + z^2 = R^2 + a^2 \\ x = 0 & \quad y^2 + z^2 = R^2 - a^2 ; \end{aligned}$$

lorsque R est supérieur à a ces deux courbes sont réelles et la propriété envisagée peut servir de définition aux anti-podaires.

§ 23. — Prenons encore les cyclides d'équation

$$\begin{aligned} (X^2 + Y^2 + Z^2)^2 - 4h(AX^2 + BY^2 + CZ^2) \\ - 4k(aX + bY + cZ) \pm l^4 = 0 , \end{aligned}$$

l'axe conoïdal étant toujours z'Oz.

Dans le cas actuel

$$\begin{aligned} \Lambda_q & \equiv (x^2 + y^2)^2 , \\ \Lambda_{q-1} & \equiv 0 , \\ \Lambda_{q-2} & \equiv 2Z^2(x^2 + y^2) - 4h(Ax^2 + By^2) : \end{aligned}$$

l'équation de (s₀) s'écrit

$$(x^2 + y^2)^2 + z^2(x^2 + y^2) - 2h(Ax^2 + By^2) = 0$$

ou

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2) - 2h(Ax^2 + By^2) = 0 ;$$

c'est la surface trouvée au § 21, sauf à poser

$$\begin{aligned} 2Ah & = R^2 + a^2 , \\ 2Bh & = R^2 - a^2 . \end{aligned}$$

Ce résultat lie donc, une fois de plus, sphères et cyclides; il se présentait un résultat analogue dans l'étude des aires ou des volumes cylindriques et coniques ¹.

§ 24. — Considérons le cas des surfaces (S) d'équation

$$\Lambda_2 + \Lambda_1 + \Lambda_0 = 0 ,$$

dont les sections normales à $z'z$ sont rencontrées en deux points par tout plan contenant $z'z$. Un conoïde y détermine deux nappes, et

$$\Sigma V_i = \frac{1}{2} \int_{\sigma} (\varrho_1^2 + \varrho_2^2) (\alpha x + \beta y) d\sigma$$

donne l'expression du noyau conoïdal que limitent Σ_1 et Σ_2 dans le seul cas où les deux nappes se trouvent de part et d'autre de l'axe $z'z$: axe conoïdal intérieur au cylindre ou coupant la sphère, dans les cas précédents.

Dans le cas contraire, le volume du même noyau a pour expression

$$N = \frac{1}{2} \int_{\sigma} |\varrho_2^2 - \varrho_1^2| (\alpha x + \beta y) d\sigma .$$

c'est-à-dire

$$N = \frac{1}{2} \int_{\sigma} \frac{|\Lambda_1|}{\Lambda_2^2} \sqrt{\Lambda_1^2 - 4\Lambda_0\Lambda_2} (\alpha x + \beta y) d\sigma \quad (6)$$

Si donc σ est tracée sur la surface (s_2) d'équation

$$\Lambda_2^4 + 4\Lambda_2\Lambda_1^2\Lambda_0 - \Lambda_1^4 = 0$$

le volume du noyau équivaut à celui du conoïde que limite σ .

§ 25. — Prenons l'exemple du cylindre circulaire

$$(X - a)^2 + Y^2 - R^2 = 0 .$$

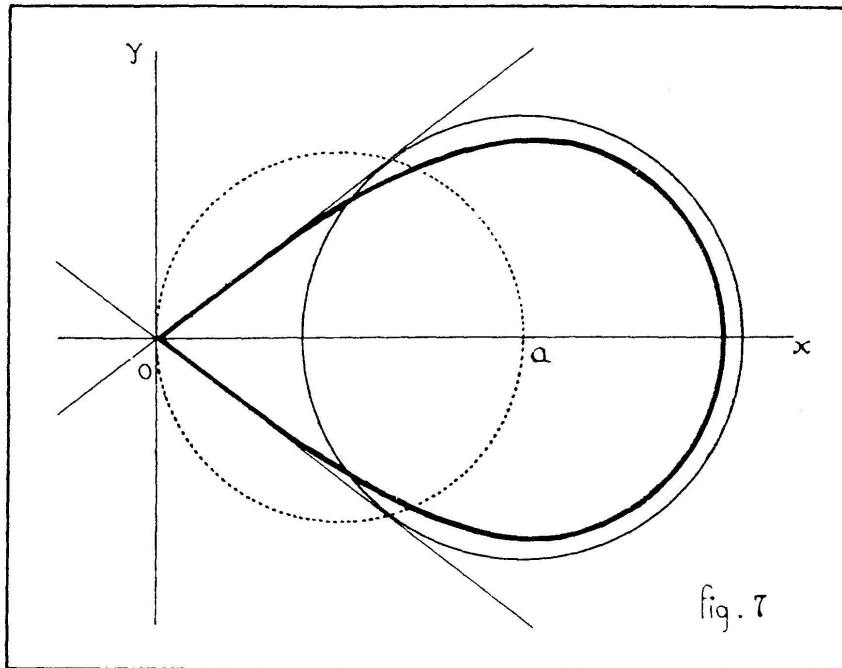
¹ A. BUHL, *Annales de la Faculté de Toulouse*, t. VII, 5^{me} mémoire, pages 198-199.

L'équation de la surface (s_2) s'écrit, tous calculs faits ¹,

$$(x^2 + y^2)^4 - 16a^2x^2[R^2x^2 + (R^2 - a^2)y^2] = 0 ;$$

il s'agit d'un cylindre à directrice du huitième degré avec point quadruple à l'origine.

1. $R < a$ (axe conoïdal extérieur au cylindre; noyau véritable) (fig. 7).



Les tangentes au point multiple sont les tangentes à la circonférence directrice; d'autre part l'axe Ox est rencontré au point d'abscisse $2\sqrt{Ra}$, intérieur à la circonférence précédente.

2. $R > a$ (axe conoïdal intérieur au cylindre) (fig. 8).

Les tangentes précédentes n'existent plus; le point sur Ox , toujours intérieur à ladite circonférence, subsiste.

Dans les figures 7 et 8 les demi-courbes seules ont été dessinées.

§ 26. — Un résultat simple s'obtient encore en considérant un cylindre dont la directrice est le limaçon de Pascal

$$(X^2 + Y^2 - 2aX)^2 - b^2(X^2 + Y^2) = 0 .$$

l'axe conoïdal étant ici la ligne des points doubles $z'z$.

¹ En coordonnées polaires

$$\rho^4 = 16a^2 \cos^2 \theta (R^2 - a^2 \sin^2 \theta) .$$

Avec

$$\Lambda_2 \equiv (x^2 + y^2)^2 ,$$

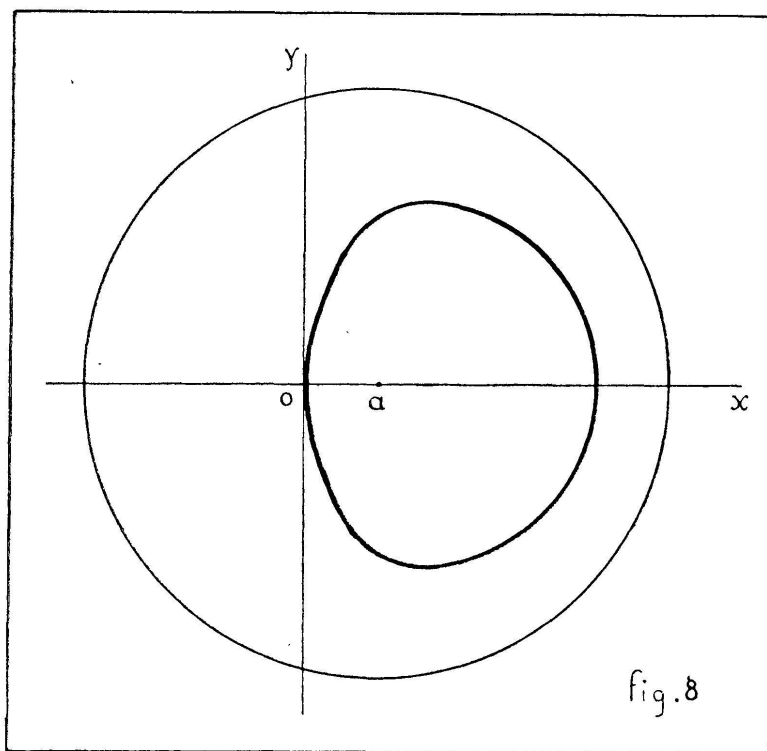
$$\Lambda_1 \equiv -4ax(x^2 + y^2) ,$$

$$\Lambda_0 \equiv 4a^2x - b^2(x^2 + y^2) ,$$

s'obtient l'équation ¹ de (s_2):

$$(x^2 + y^2)^3 - 64a^2b^2x^2 = 0 .$$

Ce cylindre offre une directrice sextique tricirculaire, dont la forme rappelle celle de la figure 2 et se trouve entièrement comprise à l'intérieur du limaçon générateur.



§ 27. — Enfin, dans le cas de la sphère

$$(X - a)^2 + Y^2 + Z^2 - R^2 = 0 ,$$

l'équation de (s_2) est la suivante:

$$(x^2 + y^2)^4 - 16a^2x^2[(R^2 - z^2)x^2 + (R^2 - a^2 - z^2)y^2] = 0 .$$

Cette écriture fait prévoir la forme des sections parallèles à xOy , donc celle de la surface, lieu de ces sections.

Septembre 1930.

¹ En coordonnées polaires

$$\rho^2 = \pm 16ab \cos \theta .$$