Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 30 (1931)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR CERTAINS VOLUMES ALGÉBRIQUES

Autor: Papillon, Pierre

Kapitel: 2. — Volumes a parois coniques.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23889

2. — Volumes a parois coniques.

§ 8. — *Expression générale.* — Substituons au cylindre un cône et calculons ΣV_i.

Soient M_i, m les points de Σ_i et de σ sur une même droite issue du sommet du cône,

$$\rho_i = \frac{\overline{OM}_i}{\overline{Om}} ,$$

α, β, γ les cosinus directeurs de la normale en m à (s).

Rapportons l'espace à un trièdre trirectangle ayant pour sommet celui du cône; il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma V_i = \displaystyle\iint_\sigma \frac{1}{3} (\Sigma \rho_i^3) (\alpha x + \beta y + \gamma z) \, d\sigma \\ \text{avec} \\ F(\rho_i x , \rho_i y , \rho_i z) = 0 . \end{array} \right.$$

Si l'on ordonne d'ailleurs F par rapport aux puissances décroissantes de XYZ,

$$F \equiv \Phi_m (X , Y , Z) + \Phi_{m-1} (X , Y , Z) + \Phi_{m-2} (X , Y , Z) + \ldots + \Phi_0 ,$$

il vient

$$\boxed{\Sigma V_i = \frac{1}{3} \iint_\sigma \left(- \frac{\Phi_{m-1}^3}{\Phi_m^3} + 3 \frac{\Phi_{m-1} \Phi_{m-2}}{\Phi_m^2} - 3 \frac{\Phi_{m-3}}{\Phi_m} \right) (\alpha x + \beta y + \gamma z) \, d\sigma} \tag{4}$$

§ 9. — Tout d'abord, la parenthèse

$$- \frac{\Phi_{m-1}^3}{\Phi_m^3} + 3 \ldots - 3 \ldots ,$$

étant homogène et d'ordre — 3, peut être égalée à la somme

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \; ;$$

dès lors, c désignant le contour de σ,

$$\Sigma V_i = \int_c \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ F & G & H \end{vmatrix} .$$

D'autre part, toute modification laissant invariante la même parenthèse n'altère point ΣV_i, et ceci permet un grand nombre d'associations entre surfaces (S); en particulier, si

$$\Phi_{m-1}^3 - 3\Phi_m \Phi_{m-1} \Phi_{m-2} + 3\Phi_m^2 \Phi_{m-3} = 0 ,$$

les sommes précédentes sont nulles.

Nous n'aborderons pas le développement de ces questions; M. A. Buhl a défriché ce terrain dans les quatrième et cinquième Mémoires précités [1].

§ 10. — Lorsque σ appartient à la surface (s_0) d'équation

$$\frac{1}{m}\left(-\frac{\Phi_{m-1}^3}{\Phi_m^3} + 3\frac{\Phi_{m-1}\Phi_{m-2}}{\Phi_m^2} - 3\frac{\Phi_{m-3}}{\Phi_m}\right) = 1 ,$$

ou

$$m\Phi_m^3 + 3\Phi_m^2\Phi_{m-3} - 3\Phi_m\Phi_{m-1}\Phi_{m-2} + \Phi_{m-1}^3 = 0 ,$$

il vient

$$\Sigma V_i = m\iint_\sigma \frac{1}{3}(\alpha x + \beta y + \gamma z)\, d\sigma \; ;$$

les volumes V_i ont donc pour moyenne arithmétique le volume conique de même nature que limite la cloison σ; cette surface (s_0) est généralement de degré $3m$.

§ 11. — *Volume cylindro-conique.* — Prenons pour (S) un cylindre circulaire dont nous pouvons toujours prendre l'équation sous la forme

$$F \equiv (X - a)^2 + Y^2 - R^2 = 0 .$$

---

[1] Pages 317-327; 195-204. Voir aussi *Géom. et Analyse Int. doubles*, pp. 8 et 30.

En cette hypothèse

$$\Phi_m \equiv x^2 + y^2 ,$$

$$\Phi_{m-1} \equiv -2ax ,$$

$$\Phi_{m-2} \equiv a^2 - R^2 ,$$

$$\Phi_{m-3} \equiv 0 ;$$

(s_0) a donc pour équation

$$2(x^2+y^2)^3 + 6(x^2+y^2)\,ax\,(a^2-R^2) - 8a^3x^3 = 0 ,$$

soit finalement [1]

$$(x^2+y^2)^3 - ax[(a^2+3R^2)x^2 - 3(a^2-R^2)y^2] = 0 .$$

C'est un cylindre dont la base, sextique tricirculaire, possède au sommet du cône un point triple.

1° $a > R$ (sommet du cône intérieur au cylindre).

Les trois branches passant à l'origine sont réelles, les tangentes en ce point ayant pour coefficients angulaires respectifs

$$\infty , \qquad \pm\sqrt{\frac{a^2+3R^2}{3(a^2-R^2)}} .$$

La courbe rencontre $x'x$ au point d'abscisse

$$\sqrt[3]{a(a^2+3R^2)} ;$$

ce point est du reste intérieur à la circonférence directrice

$$(x-a)^2 + y^2 - R^2 = 0 .$$

---

[1] En coordonnées polaires

$$\rho^3 = a[3R^2\cos\theta + a^2\cos 3\theta] .$$

Les valeurs maximum et minimum de ρ sont acquises pour

$$\theta = 0$$

et, pour

$$\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{3a^2+R^2}}{2a} \qquad \text{et alors} \qquad \rho = -\sqrt{a^2-R^2} ,$$

avec

$$a > R .$$

Enfin, sextique et circonférence se coupent aux points de coordonnées (fig. 1)

$$\left(a - \frac{R^2}{a}, \quad \pm \frac{R}{a}\sqrt{a^2 - R^2}\right).$$

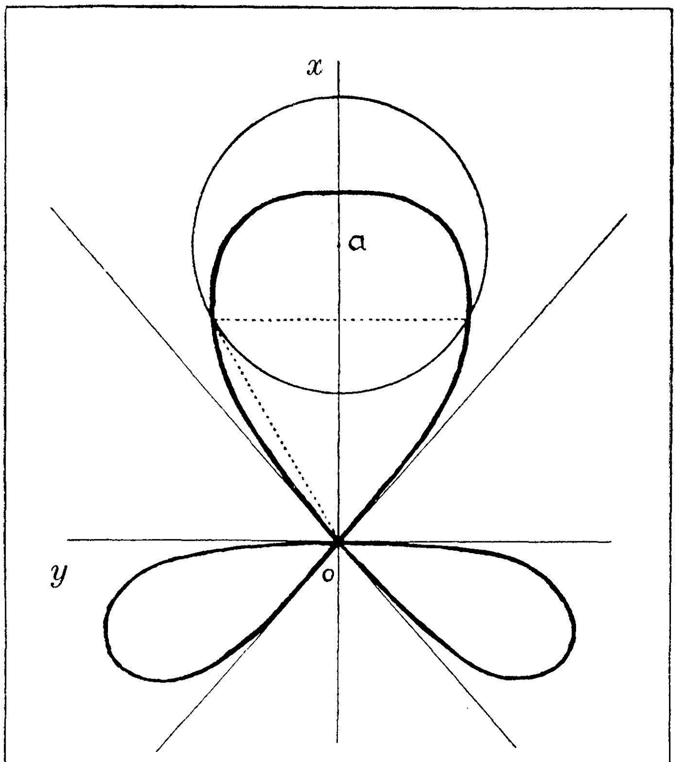

fig. 1

2. $a < R$ (sommet du cône intérieur au cylindre).

La branche tangente en 0 à l'axe $y'y$ est seule réelle; la sextique est intérieure à la circonférence (fig. 2).

§ 12. — *Volume sphéro-conique.* — Prenons pour (S) la sphère d'équation

$$(X - a)^2 + Y^2 + Z^2 - R^2 = 0 ;$$

l'équation de (s_0) s'obtient en substituant $y^2 + z^2$ à y^2 dans les calculs du paragraphe précédent; soit.

$$(x^2 + r^2)^3 - ax[(a^2 + 3R^2)x^2 - 3(a^2 - R^2)r^2] = 0$$

avec

$$r^2 = y^2 + z^2 .$$

Ainsi (s_0) n'est autre que la surface de révolution d'axe $x'Ox$ ayant pour méridienne la sextique déjà étudiée.

§ 13. — Si, en résumé, nous associons à la circonférence

$$(x - a)^2 + y^2 - R^2 = 0$$

la sextique

$$(x^2 + y^2)^3 - ax[(a^2 + 3R^2)x^2 - 3(a^2 - R^2)y^2] = 0 ,$$

un cône de sommet O découpe:

1° Sur les cylindres droits admettant ces courbes pour directrices,

2° Sur les surfaces d'axe Ox admettant ces courbes pour méridiennes

des cloisons Σ_1 et Σ_2 d'une part, une cloison σ d'autre part, telles que le dernier volume conique soit la moyenne des deux premiers.

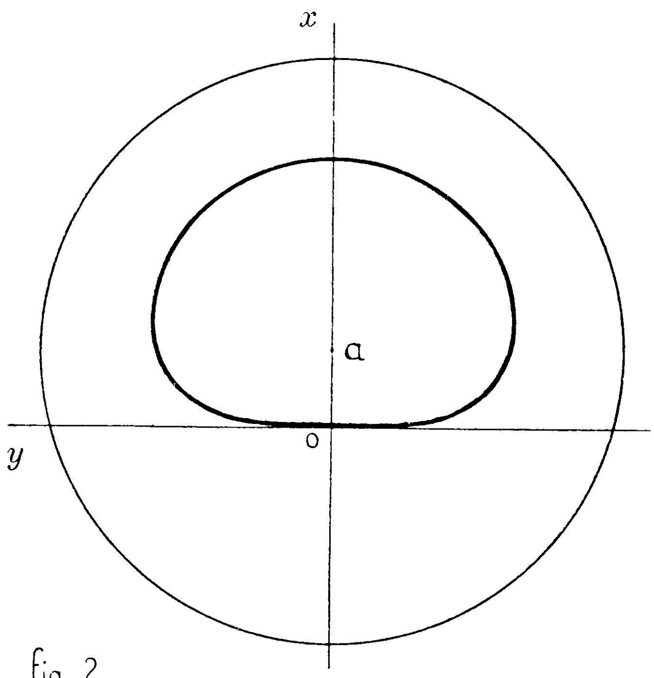

Fig. 2

§ 14. — Pour les surfaces (S) de révolution

$$az^2 + br^2 - 1 = 0 ,$$
$$(z^2 + r^2)^2 - (a^2z^2 \pm b^2r^2) = 0 ,$$
$$(z^2 + r^2 - 2ar)^2 - b^2(z^2 + r^2) = 0 ,$$

à méridienne conique, ovale de Cassini, limaçon de Pascal, les surfaces (s_0) sont les mêmes:

$$(z^2 + r^2)^3 - z(Az^2 + Br^2) = 0 .$$

De là une association possible de méridiennes fort différentes; nous n'insisterons pas sur la détermination de ces méridiennes associées.

3. — Volumes a parois conoïdales.

§ 15. — *Expression générale.* — Substituons enfin au cylindre un conoïde droit et calculons ΣV_i.

Soient, l'axe conoïdal étant confondu avec $z'z$, μ, M_i, m les points de $z'z$, de Σ_i et de σ sur une même parallèle au plan xOy

$$\rho_i = \frac{\overline{\mu M_i}}{\overline{\mu m}} ,$$

α, β, γ les cosinus directeurs de la normale en m à (s).

Il vient

$$\left\{\begin{array}{l} \Sigma V_i = \displaystyle\iint_\sigma \frac{1}{2}(\Sigma \rho_i^2)(\alpha x + \beta y)\, d\sigma , \\ \text{avec} \\ F(\rho_i x , \rho_i y , z) = 0 . \end{array}\right.$$

Si l'on ordonne d'ailleurs F par rapport aux puissances décroissantes de XY,

$$F \equiv \Lambda_q(X , Y , Z) + \Lambda_{q-1} + \dots$$

Λ_i étant homogène et de degré i en XY, il vient

$$\boxed{\Sigma V_i = \frac{1}{2}\iint_\sigma \left(\frac{\Lambda_{q-1}^2}{\Lambda_q^2} - 2\frac{\Lambda_{q-2}}{\Lambda_q}\right)(\alpha x + \beta y)\, d\sigma} \qquad (5)$$

§ 16. — Posons

$$\Lambda = \frac{\Lambda_{q-1}^2}{\Lambda_q^2} - 2\frac{\Lambda_{q-2}}{\Lambda_q} ;$$