

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 30 (1931)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR CERTAINS VOLUMES ALGÈBRIQUES  
**Kapitel:** 2. — Volumes a parois coniques.  
**Autor:** Papillon, Pierre  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-23889>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 20.11.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

2. — VOLUMES A PAROIS CONIQUES.

§ 8. — *Expression générale.* — Substituons au cylindre un cône et calculons  $\Sigma V_i$ .

Soient  $M_i, m$  les points de  $\Sigma_i$  et de  $\sigma$  sur une même droite issue du sommet du cône,

$$\varrho_i = \frac{\overline{OM}_i}{Om} ,$$

$\alpha, \beta, \gamma$  les cosinus directeurs de la normale en  $m$  à  $(s)$ .

Rapportons l'espace à un trièdre trirectangle ayant pour sommet celui du cône; il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma V_i = \int_{\sigma} \int \frac{1}{3} (\Sigma \varrho_i^3) (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma \\ \text{avec} \\ F(\varrho_i x, \varrho_i y, \varrho_i z) = 0 . \end{array} \right.$$

Si l'on ordonne d'ailleurs  $F$  par rapport aux puissances décroissantes de  $XYZ$ ,

$$F \equiv \Phi_m(X, Y, Z) + \Phi_{m-1}(X, Y, Z) + \Phi_{m-2}(X, Y, Z) + \dots + \Phi_0 ,$$

il vient

$$\Sigma V_i = \frac{1}{3} \int_{\sigma} \int \left( -\frac{\Phi_{m-1}^3}{\Phi_m^3} + 3 \frac{\Phi_{m-1} \Phi_{m-2}}{\Phi_m^2} - 3 \frac{\Phi_{m-3}}{\Phi_m} \right) (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma$$

(4)

§ 9. — Tout d'abord, la parenthèse

$$-\frac{\Phi_{m-1}^3}{\Phi_m^3} + 3 \dots - 3 \dots ,$$

étant homogène et d'ordre — 3, peut être égalée à la somme

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} ;$$

dès lors,  $c$  désignant le contour de  $\sigma$ ,

$$\Sigma V_i = \int_c \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ F & G & H \end{vmatrix} .$$

D'autre part, toute modification laissant invariante la même parenthèse n'altère point  $\Sigma V_i$ , et ceci permet un grand nombre d'associations entre surfaces (S); en particulier, si

$$\Phi_{m-1}^3 - 3\Phi_m \Phi_{m-1} \Phi_{m-2} + 3\Phi_m^2 \Phi_{m-3} = 0 ,$$

les sommes précédentes sont nulles.

Nous n'aborderons pas le développement de ces questions; M. A. Buhl a défriché ce terrain dans les quatrième et cinquième Mémoires précités <sup>1</sup>.

§ 10. — Lorsque  $\sigma$  appartient à la surface ( $s_0$ ) d'équation

$$\frac{1}{m} \left( - \frac{\Phi_{m-1}^3}{\Phi_m^3} + 3 \frac{\Phi_{m-1} \Phi_{m-2}}{\Phi_m^2} - 3 \frac{\Phi_{m-3}}{\Phi_m} \right) = 1 ,$$

ou

$$m \Phi_m^3 + 3 \Phi_m^2 \Phi_{m-3} - 3 \Phi_m \Phi_{m-1} \Phi_{m-2} + \Phi_{m-1}^3 = 0 ,$$

il vient

$$\Sigma V_i = m \int_{\sigma} \int \frac{1}{3} (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma ;$$

les volumes  $V_i$  ont donc pour moyenne arithmétique le volume conique de même nature que limite la cloison  $\sigma$ ; cette surface ( $s_0$ ) est généralement de degré  $3m$ .

§ 11. — *Volume cylindro-conique.* — Prenons pour (S) un cylindre circulaire dont nous pouvons toujours prendre l'équation sous la forme

$$F \equiv (X - a)^2 + Y^2 - R^2 = 0 .$$

<sup>1</sup> Pages 317-327; 195-204. Voir aussi *Géom. et Analyse Int. doubles*, pp. 8 et 30.

En cette hypothèse

$$\Phi_m \equiv x^2 + y^2 ,$$

$$\Phi_{m-1} \equiv - 2ax ,$$

$$\Phi_{m-2} \equiv a^2 - R^2 ,$$

$$\Phi_{m-3} \equiv 0 ;$$

(s<sub>0</sub>) a donc pour équation

$$2(x^2 + y^2)^3 + 6(x^2 + y^2)ax(a^2 - R^2) - 8a^3x^3 = 0 ,$$

soit finalement <sup>1</sup>

$$(x^2 + y^2)^3 - ax[(a^2 + 3R^2)x^2 - 3(a^2 - R^2)y^2] = 0 .$$

C'est un cylindre dont la base, sextique tricirculaire, possède au sommet du cône un point triple.

1°  $a > R$  (sommet du cône intérieur au cylindre).

Les trois branches passant à l'origine sont réelles, les tangentes en ce point ayant pour coefficients angulaires respectifs

$$\infty , \quad \pm \sqrt{\frac{a^2 + 3R^2}{3(a^2 - R^2)}} .$$

La courbe rencontre  $x'x$  au point d'abscisse

$$\sqrt[3]{a(a^2 + 3R^2)} ;$$

ce point est du reste intérieur à la circonférence directrice

$$(x - a)^2 + y^2 - R^2 = 0 .$$

<sup>1</sup> En coordonnées polaires

$$\rho^3 = a[3R^2 \cos \theta + a^2 \cos 3\theta] .$$

Les valeurs maximum et minimum de  $\rho$  sont acquises pour

$$\theta = 0$$

et, pour

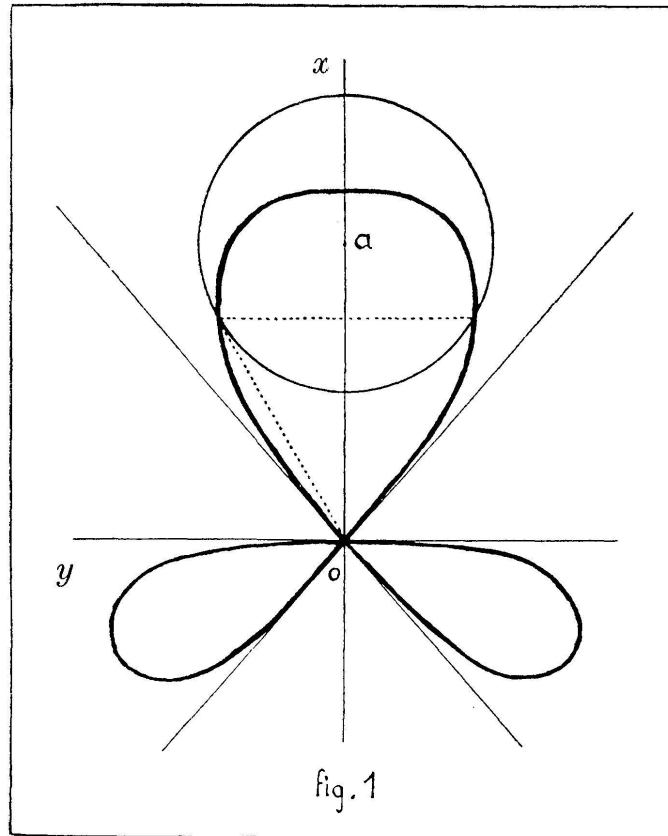
$$\sin \theta = \pm \frac{\sqrt{3a^2 + R^2}}{2a} \quad \text{et alors} \quad \rho = -\sqrt{a^2 - R^2} ,$$

avec

$$a > R .$$

Enfin, sextique et circonférence se coupent aux points de coordonnées (fig. 1)

$$\left( a - \frac{R^2}{a}, \quad \pm \frac{R}{a} \sqrt{a^2 - R^2} \right).$$



2.  $a < R$  (sommet du cône intérieur au cylindre).

La branche tangente en 0 à l'axe  $y'y$  est seule réelle; la sextique est intérieure à la circonférence (fig. 2).

§12. — *Volume sphéro-conique.* — Prenons pour (S) la sphère d'équation

$$(X - a)^2 + Y^2 + Z^2 - R^2 = 0 ;$$

l'équation de  $(s_0)$  s'obtient en substituant  $y^2 + z^2$  à  $y^2$  dans les calculs du paragraphe précédent; soit.

$$(x^2 + r^2)^3 - ax[(a^2 + 3R^2)x^2 - 3(a^2 - R^2)r^2] = 0$$

avec

$$r^2 = y^2 + z^2 .$$

Ainsi  $(s_0)$  n'est autre que la surface de révolution d'axe  $x'Ox$  ayant pour méridienne la sextique déjà étudiée.

§ 13. — Si, en résumé, nous associons à la circonférence

$$(x - a)^2 + y^2 - R^2 = 0$$

la sextique

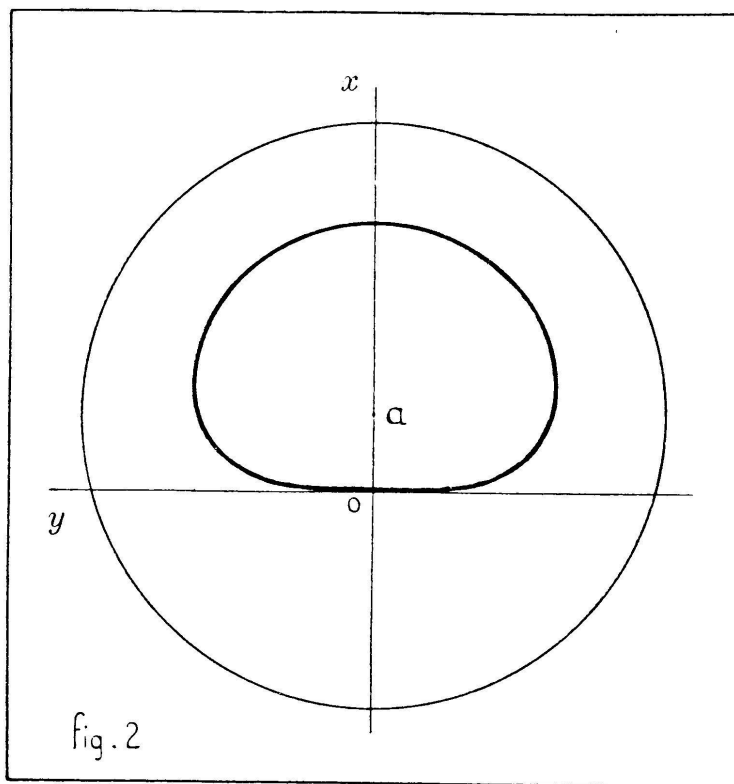
$$(x^2 + y^2)^3 - ax[(a^2 + 3R^2)x^2 - 3(a^2 - R^2)y^2] = 0 ,$$

un cône de sommet O découpe :

1° Sur les cylindres droits admettant ces courbes pour directrices,

2° Sur les surfaces d'axe Ox admettant ces courbes pour méridiennes

des cloisons  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  d'une part, une cloison  $\sigma$  d'autre part, telles que le dernier volume conique soit la moyenne des deux premiers.



§ 14. — Pour les surfaces (S) de révolution

$$az^2 + br^2 - 1 = 0 ,$$

$$(z^2 + r^2)^2 - (a^2 z^2 \pm b^2 r^2) = 0 ,$$

$$(z^2 + r^2 - 2ar)^2 - b^2(z^2 + r^2) = 0 ,$$

à méridienne conique, ovale de Cassini, limaçon de Pascal, les surfaces  $(s_0)$  sont les mêmes :

$$(z^2 + r^2)^3 - z(Az^2 + Br^2) = 0 .$$

De là une association possible de méridiennes fort différentes; nous n'insisterons pas sur la détermination de ces méridiennes associées.

### 3. — VOLUMES A PAROIS CONOÏDALES.

§ 15. — *Expression générale.* — Substituons enfin au cylindre un conoïde droit et calculons  $\Sigma V_i$ .

Soient, l'axe conoïdal étant confondu avec  $z'z$ ,  $\mu$ ,  $M_i$ ,  $m$  les points de  $z'z$ , de  $\Sigma_i$  et de  $\sigma$  sur une même parallèle au plan  $xOy$

$$\rho_i = \frac{\overline{\mu M_i}}{\overline{\mu m}},$$

$\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  les cosinus directeurs de la normale en  $m$  à  $(s)$ .

Il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma V_i = \int_{\sigma} \int \frac{1}{2} (\Sigma \rho_i^2) (\alpha x + \beta y) d\sigma, \\ \text{avec} \\ F(\rho_i x, \rho_i y, z) = 0. \end{array} \right.$$

Si l'on ordonne d'ailleurs  $F$  par rapport aux puissances décroissantes de  $XY$ ,

$$F \equiv \Lambda_q(X, Y, Z) + \Lambda_{q-1} + \dots$$

$\Lambda_i$  étant homogène et de degré  $i$  en  $XY$ , il vient

$$\Sigma V_i = \frac{1}{2} \int_{\sigma} \int \left( \frac{\Lambda_{q-1}^2}{\Lambda_q^2} - 2 \frac{\Lambda_{q-2}}{\Lambda_q} \right) (\alpha x + \beta y) d\sigma \quad (5)$$

§ 16. — Posons

$$\Lambda = \frac{\Lambda_{q-1}^2}{\Lambda_q^2} - 2 \frac{\Lambda_{q-2}}{\Lambda_q};$$