Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 31 (1932)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES DU COSINUS ET DU SINUS ORDINAIRES ET HYPERBOLIQUES

Autor: Cioranesco, N.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-24614

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR LES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES DU COSINUS ET DU SINUS ORDINAIRES ET HYPERBOLIQUES

PAR

N. CIORANESCO (Bucarest).

---

1. — Les fonctions qui admettent un théorème d'addition algébrique ou « les fonctions W », sont celles qui satisfont à une équation fonctionnelle de la forme:

$$F[f(x), f(y), f(x+y)] = 0 \tag{1}$$

F (X, Y, Z) étant un polynome par rapport aux trois variables.

Leur étude a été faite depuis Weierstrass par de nombreux mathématiciens, et notamment dans le cas des fonctions réelles on doit récemment à M. P. MONTEL [1] une mise au point très importante de la question.

Les fonctions qui satisfont à une équation de la forme (1), peuvent satisfaire aussi à des équations de la forme:

$$G[f(x), f(y), f(x+y), f(x-y)] = 0 \tag{2}$$

G (X, Y, Z, T) étant un polynome. Quoique le polynome G ait une variable de plus, il peut se faire que l'équation (2) soit plus simple que l'équation (1) que vérifie la même fonction $f(x)$. Par exemple, l'équation de Poisson:

$$f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)f(y) = 0$$

est plus simple que l'équation de la forme (1) que vérifie le cosinus ordinaire. Nous allons considérer ici deux cas particuliers

---

[1] Paul MONTEL, Sur les fonctions d'une variable réelle qui admettent un théorème d'addition algébrique (*Annales scient. de l'Ecole normale*, t. XLVIII, 1931, p. 65).

des équations de la forme (2), l'un dans lequel le polynome G est irréductible et l'autre avec un polynome décomposable. Ces deux équations permettent de retrouver d'une manière très simple les propriétés caractéristiques des fonctions circulaires.

2. — Considérons l'équation fonctionnelle:

$$f(x+y)\,f(x-y) = f^2(x) + f^2(y) - 1 \tag{3}$$

où, comme dans tout ce qui va suivre, les fonctions et les variables sont supposées réelles. Si l'on change le rôle de x et y on voit que $f(x)$ est une fonction paire. D'autre part, on voit que si $f_0(x)$ est une solution, $\pm f_0(ax)$ est aussi solution quelle que soit la constante a, même si a est purement imaginaire, car $f_0(ix)$ est aussi une fonction réelle, à cause de la parité de $f(x)$.

Si l'on fait dans (3) $x = y = 0$ on trouve $f(0) = \pm 1$. Considérons la solution pour laquelle $f(0) = 1$ (on cherche les solutions uniformes de (3)). Nous allons faire sur $f(x)$ successivement les hypothèses:

a) qu'il existe un nombre $\varpi \neq 0$ tel que $f\left(\frac{\varpi}{2}\right) = 0$;

b) que $f(x)$ n'a pas de zéros.

a) $f\left(\frac{\varpi}{2}\right) = 0$. Faisons alors dans l'équation (3) $x = u + \frac{\varpi}{2}$, $y = u$ on aura:

$$f^2\left(u + \frac{\varpi}{2}\right) + f^2(u) - 1 = 0$$

et par conséquent:

$$f^2(u+\varpi) + f^2\left(u + \frac{\varpi}{2}\right) - 1 = 0\,.$$

En faisant la différence, on déduit:

$$f^2(u+\varpi) - f^2(u) = 0$$

donc:

$$f(u+\varpi) = \pm f(u)\,.$$

Pour voir quel est le signe qui convient, faisons dans l'équation $x = y = \frac{\varpi}{2}$. Cela nous donne:

$$f(\varpi)\, f(0) = -1$$

et en faisant dans la relation précédente $u = 0$, on voit que l'on a:

$$f(x + \varpi) = -f(x) \,. \tag{4}$$

Il résulte de cette relation que la fonction $f(x)$ admet la période 2ϖ:

$$f(x + 2\varpi) = f(x) \,. \tag{5}$$

On en déduit à présent facilement que la fonction $f(x)$ est bornée supérieurement en module par le nombre un. En effet, supposons que pour $x = a$ on ait: $|f(a)| > 1$. Alors, en faisant dans l'équation (3) $x = a$, on obtient:

$$f(x + a)\, f(a - x) > 0$$

et cela quel que soit x, en particulier pour $x = \frac{\varpi}{2}$. Mais, si dans la relation (4), on remplace x par $a - \frac{\varpi}{2}$ on a:

$$f\left(a + \frac{\varpi}{2}\right) = -f\left(a - \frac{\varpi}{2}\right)$$

et par conséquent l'inégalité précédente n'est pas possible. Il résulte que l'on doit avoir nécessairement $|f(x)| \leqq 1$. La seule hypothèse de l'existence d'un zéro pour la solution de l'équation (3) nous a permis de montrer que $f(x)$ est périodique et bornée dans tout son domaine d'existence.

Il est permis alors de poser pour une valeur quelconque α de x: $f(\alpha) = \cos\theta$. Si l'on fait dans (3) $x = y = \alpha$, on trouve: $f(2\alpha) = \cos 2\theta$.

Supposons que l'on ait déjà trouvé: $f[(m - 1)\alpha] = \cos(m - 1)\theta$; $f(m\alpha) = \cos m\theta$; on en déduit alors de l'équation elle-même: $f[(m + 1)\alpha] = \cos(m + 1)\theta$. Donc, quel que soit l'entier n, on a: $f(n\alpha) = \cos n\theta$. De même, si l'on fait dans (3) $x = y = \frac{\alpha}{2}$ on obtient:

$$f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\theta}{2} \qquad \text{et en général} \qquad f\left(\frac{\alpha}{2^m}\right) = \cos\frac{\theta}{2^m} \,.$$

En combinant ces deux résultats, on voit que quels que soient les entiers n et p on a:

$$f\left(\frac{n}{2^p}\alpha\right) = \cos\frac{n}{2^p}\theta .$$

Si l'on suppose que l'on cherche les solutions continues de l'équation (3), on en déduit:

$$f(x) = \cos ax , \qquad a = \frac{\theta}{\alpha} = \frac{\pi}{\varpi}$$

en tenant compte des propriétés déjà trouvées de $f(x)$. La solution la plus générale de l'équation (3), dans les hypothèses précédentes, est par conséquent:

$$f(x) = \pm \cos\frac{\pi}{\varpi}x .$$

b) Supposons à présent que $f(x)$ ne s'annule pour aucune valeur de x. Par conséquent, il existe un nombre positif μ tel que: $|f(x)| \geqq \mu$. Supposons μ le plus grand des nombres satisfaisant à cette condition. Mais en faisant $x = y$ dans (3) on a: $f(2x) = 2f^2(x) - 1$ et par conséquent: $|f(2x)| \geqq 2\mu^2 - 1$.

Il en résulte, en laissant de côté les cas qui ne présentent pas d'intérêt, que l'on doit avoir:

$$2\mu^2 - 1 \geqq \mu$$

et par conséquent $\mu \geqq 1$ (car $\mu > 0$). L'hypothèse de l'absence de zéro pour la solution $f(x)$, entraîne avec soi l'inégalité: $|f(x)| \geqq 1$.

Il est alors loisible de poser, pour une valeur quelconque α de x, $f(\alpha) = ch\varpi$. De l'équation (3) on déduit alors comme plus haut: $f(n\alpha) = chn\varpi$ et $f\left(\frac{\alpha}{2^p}\right) = ch\frac{\varpi}{2^p}$. On en déduit que les solutions continues de l'équation (3) sont dans ce cas: $f(x) = \pm chax$, a étant une constante arbitraire. Remarquons qu'on aurait pu obtenir cette solution, en vertu de l'observation faite au début, de la solution précédente, en changeant x en ix.

3. — La seconde équation fonctionnelle que nous allons considérer est:

$$\varphi(x+y)\,\varphi(x-y) = \varphi^2(x) - \varphi^2(y) \tag{6}$$

et l'on voit que le polynome: $ZT = X^2 - Y^2$ n'est pas irréductible. Si l'on change x et y on voit que $\varphi(-u) = -\varphi(u)$, φ est une fonctione impaire, et par conséquent $\varphi(0) = 0$.

On voit que si $\varphi_0(x)$ est une solution, $C\varphi_0(ax)$ en est une aussi, quelles que soient les constantes a et C.

Comme précédemment, nous allons faire sur $\varphi(x)$ deux hypothèses:

a) Supposons qu'il existe un nombre $\varpi \neq 0$ tel que $\varphi(\varpi) = 0$. Faisons alors dans l'équation (6) $x = u + \varpi$, $y = u$. On obtient:

$$\varphi^2(u+\varpi) - \varphi^2(u) = 0,$$

ou

$$\varphi(u+\varpi) = \pm\,\varphi(u)\,. \tag{7}$$

Pour décider quel est le signe qu'il faut prendre, faisons dans l'équation (6) $x = \varpi$, $y = \frac{\varpi}{2}$. On a ainsi

$$\varphi\left(\frac{3\varpi}{2}\right) = -\,\varphi\left(\frac{\varpi}{2}\right)$$

et si dans la relation (7) on fait $u = \frac{\varpi}{2}$, on voit que l'on a:

$$\varphi(u+\varpi) = -\,\varphi(u)\,. \tag{8}$$

Il en résulte comme plus haut, que la fonction $\varphi(x)$ admet la période 2ϖ. On a $\varphi(u+2\varpi) = \varphi(u)$.

Supposons que l'on cherche les solutions continues de l'équation (6). D'ailleurs il suffit de supposer que $\varphi(x)$ est continue autour de l'origine pour en déduire qu'elle est continue partout. Supposons que ϖ est le plus petit en module des zéros de $\varphi(x)$ et que précisément $\varpi > 0$, car $-\varpi$ est aussi zéro de φ, car $\varphi(x)$ est fonction impaire. De ces faits, il en résulte que $\varphi(x)$ garde un signe constant dans $(0, \varpi)$.

Supposons, pour fixer les idées, $\varphi(x) \geqq 0$ dans $(0, \varpi)$ car $-\varphi(x)$ est aussi solution. Il résulte de $\varphi(0) = \varphi(\varpi) = 0$ et de

la continuité de $\varphi(x)$, que dans $(0, \varpi)$, $\varphi(x)$ a au moins une valeur maxima. Soit $0 < \xi < \varpi$ la valeur de x pour laquelle $\varphi(\xi) =$ maximum maximorum si $\varphi(x)$ en a plusieurs. Mais de la relation (8) on déduit:

$$\varphi(\varpi - x) = \varphi(x) \tag{9}$$

ce qui montre qu'en des points symétriques par rapport à $\frac{\varpi}{2}$, $\varphi(x)$ prend des valeurs égales. Par conséquent, il en résulte que $\xi \leqq \frac{\varpi}{2}$ et que $\varphi(\varpi - \xi)$ est aussi une valeur extrême. Si $\xi \neq \varpi - \xi$, $\varphi\left(\frac{\varpi}{2}\right)$ elle aussi, ne peut être qu'une valeur extrême de $\varphi(x)$. Montrons qu'on ne peut avoir que:

$$\varphi\left(\frac{\varpi}{2}\right) = \varphi(\xi) = \varphi(\varpi - \xi) = \text{Max. maximorum}\ .$$

En effet, s'il en était autrement, on déduirait de l'équation (6):

$$\varphi\left(\frac{\varpi}{2} + y\right)\varphi\left(\frac{\varpi}{2} - y\right) = \varphi^2\left(\frac{\varpi}{2}\right) - \varphi^2(y) \tag{10}$$

quel que soit y. En particulier pour $y = \xi$ on déduirait alors:

$$\varphi\left(\frac{\varpi}{2} + \xi\right)\varphi\left(\frac{\varpi}{2} - \xi\right) < 0\ ,$$

ce qui ne peut pas avoir lieu, car par hypothèse dans $(0, \varpi)$, $\varphi(x)$ garde un signe constant $\left(\xi \leqq \frac{\varpi}{2}\right)$.

Par conséquent, $\varphi\left(\frac{\varpi}{2}\right)$ est une valeur extrême pour $\varphi(x)$ et l'on peut écrire: $\varphi(x) \leqq \varphi\left(\frac{\varpi}{2}\right)$ pour tout $0 \leqq x \leqq \varpi$. Comme $C\varphi(x)$ est aussi solution de l'équation (6), on peut choisir C de manière que $\varphi\left(\frac{\varpi}{2}\right) = 1$. Soit $\varphi_0(x)$ la solution ainsi particularisée. La relation (10) s'écrit dans ce cas:

$$\varphi_0\left(\frac{\varpi}{2} + x\right)\varphi_0\left(\frac{\varpi}{2} - x\right) = 1 - \varphi_0^2(x)\ . \tag{11}$$

Mais, si dans la formule (9) on remplace x par $x + \frac{\varpi}{2}$, on a:

$$\varphi_0\left(\frac{\varpi}{2} + x\right) = \varphi_0\left(\frac{\varpi}{2} - x\right) = \psi_0(x) \tag{12}$$

en désignant par $\psi_0(x)$ la valeur commune. Alors (11) peut s'écrire:

$$\varphi_0^2(x) + \psi_0^2(x) = 1 \ . \tag{11'}$$

Si dans l'équation fonctionnelle (6) on remplace x par $x + \frac{\varpi}{2}$ et y par x on obtient:

$$\psi_0(2x) = \psi_0^2(x) - \varphi_0^2(x) \ . \tag{13}$$

Soit à présent $0 < \alpha < \frac{\varpi}{2}$ une valeur quelconque de x. On peut poser: $\varphi_0(\alpha) = \sin\theta$. On déduit alors de la relation (11'): $\psi_0(\alpha) = \cos\theta$ car le signe de $\psi_0(\alpha)$ se déduit de (12), et l'on a $\varphi(x) \geqq 0$ dans $(0, \varpi)$ et $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$. A l'aide des formules précédentes, on aura:

$$\psi_0(2\alpha) = \cos 2\theta \ ; \qquad \varphi_0(2\alpha) = \sin 2\theta \ .$$

Mais l'équation fonctionnelle (6) nous permet de déduire:

$$\varphi[(n+1)x] = \frac{\varphi^2(nx) - \varphi^2(x)}{\varphi[(n-1)x]} \ .$$

Si l'on fait dans cette relation $x = \alpha$, on trouve, en supposant que l'on ait déjà trouvé: $\varphi_0(m\alpha) = \sin m\theta$ $(m = 1, 2, \ldots n)$, $\varphi[(n+1)\alpha] = \sin(n+1)\theta$. Par conséquent, quel que soit l'entier n on a: $\varphi(n\alpha) = \sin n\theta$. De même, des relations (11') et (13) on trouve:

$$\varphi_0\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \psi_0(\alpha)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}} = \sin\frac{\theta}{2} \ ; \qquad \psi^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\theta}{2}$$

et ainsi de suite:

$$\varphi_0\left(\frac{\alpha}{2^p}\right) = \sin\frac{\theta}{2^p} \ .$$

Par conséquent, pour tout nombre $r = \frac{n}{2^p}$ on a: $\varphi_0(r\alpha) = \sin r\theta$.

A cause de la continuité de $\varphi(x)$ et du fait que les nombres r peuvent approcher tout nombre autant que l'on veut, on déduit que: $\varphi_0(x) = \sin \frac{\theta}{\alpha} x = \sin \frac{\pi}{\varpi} x$ et la solution générale dans ce cas est: $\varphi(x) = C \sin \frac{\pi}{\varpi} x$.

b) La seconde hypothèse qu'il faudrait faire, est que $\varphi(x)$ n'a pas d'autres zéros en dehors de $x = 0$. Pour ne pas allonger trop ces considérations, remarquons qu'on peut obtenir cette seconde solution en remplaçant x par ix dans la précédente et C par C_i, ce qui nous conduit à une solution réelle, car $\varphi(x)$ est impaire. Cette solution est: $\varphi(x) = C\ sh\, ax$ qui en effet n'a d'autre zéro réel que $x = 0$.

Enfin, remarquons que l'équation (6) admet une solution sous une troisième forme, à cause du fait que l'équation $ZT = X^2 - Y^2$ n'est pas irréductible. Cette solution est la solution commune aux équations fonctionnelles:

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \ ; \qquad \varphi(x - y) = \varphi(x) - \varphi(y)$$

dont le produit nous donne l'équation (6). Par conséquent, cette troisième solution est: $\varphi(x) = Ax$ et celle-ci peut être considérée comme la solution singulière de l'équation (6).

Il est possible que les équations qui font l'objet de ces considérations élémentaires, aient déjà fait l'objet d'autres études. Je remarque à cette occasion qu'il serait utile d'avoir un répertoire bibliographique des diverses équations fonctionnelles étudiées, en restreignant au besoin la notion d'équation fonctionnelle qui est employée parfois dans un sens trop large.

J'ai voulu montrer ici comment, à l'aide des équations précédentes et en supposant l'existence d'un zéro pour la solution, on peut obtenir les propriétés élémentaires des fonctions cos x et sin x.