Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 31 (1932)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE DÉMONSTRATION SIMPLE DE LA FORMULE D'INTERPOLATION DE S. BERNSTEIN

Autor: Wundheiler, Alexandre

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-24615

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

UNE DÉMONSTRATION SIMPLE DE LA FORMULE D'INTERPOLATION DE S. BERNSTEIN

PAR

Alexandre WUNDHEILER (Varsovie).

La formule de M. Bernstein:

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} f\left(\frac{k}{m}\right)\binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k}, \qquad 0 \leq x \leq 1, \tag{1}$$

donne un développement effectif de la fonction continue $f(x)$ en une suite uniformément convergente de polynomes. En tenant compte du théorème bien connu de Weierstrass, il suffit de démontrer cette formule pour les polynomes $f(x)$, ce qui se réduit à sa démonstration pour $f(x) = x^p$, vu sa dépendance linéaire de $f(x)$. Il s'agit alors de démontrer pour p entier positif

$$x^p = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{k^p}{m^p}\binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k}. \tag{2}$$

Nous partons, dans ce but, de l'identité assez proche de (2):

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{k(k-1)\ldots(k-p+1)}{m(m-1)\ldots(m-p+1)}\binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} = x^p. \tag{3}$$

Sa vérification est immédiate. En effet, le premier membre est égal à

$$x^p \sum_{p}^{m} \frac{(m-p)\ldots(m-k+1)}{(k-p)\ldots 1} x^{k-p}(1-x)^{m-p-(k-p)}$$

$$= x^p \sum_{i=0}^{m-p} \binom{m-p}{i} x^i (1-x)^{m-p-i} = x^p,$$

car cette somme est le développement du binôme

$$(x + \overline{1 - x})^{m-p} = 1 \ .$$

Il s'agit maintenant de comparer la somme (3) avec

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{k^p}{m^p} \binom{m}{k} x^k (1 - x)^{m-k} \ . \tag{4}$$

Cette comparaison est fondée sur la remarque bien simple que, si k est suffisamment supérieur à $p \left(k > \frac{p^2}{\varepsilon}\right)$, les expressions

$$\frac{k(k-1) \ldots (k-p+1)}{m(m-1) \ldots (m-p+1)} \qquad \text{et} \qquad \frac{k^p}{m^p}$$

diffèrent d'aussi peu que l'on veut. Si, de plus, m est suffisamment grand, chacun de ces termes mêmes, pour les autres valeurs de k, sera arbitrairement petit.

D'une manière précise, pour $p \leqq k \leqq m$ on aura:

$$0 \leqq \frac{k^p}{m^p} - \frac{k(k-1) \ldots (k-p+1)}{m(m-1) \ldots (m-p+1)} \leqq \frac{k^p}{m^p} - \frac{(k-p)^p}{m^p}$$

$$= \frac{k^p}{m^p}\left[1 - \left(1 - \frac{p}{k}\right)^p\right] \leqq 1 - \left(1 - \frac{p}{k}\right)^p \leqq 1 - \left(1 - \frac{p^2}{k}\right)$$

$$= \frac{p^2}{k} < \varepsilon \ , \qquad \text{pour} \qquad k > \frac{p^2}{\varepsilon} \ .$$

Tandis que, pour $k \leqq \frac{p^2}{\varepsilon}$:

$$\frac{k(k-1) \ldots (k-p+1)}{m(m-1) \ldots (m-p+1)} \leqq \frac{k^p}{(m-p)^p} \leqq \left(\frac{2k}{m}\right)^p \leqq \left(\frac{2p^2}{\varepsilon m}\right)^p < \frac{\varepsilon}{2} \ ,$$

si

$$m > 2p \qquad \text{et} \qquad > \frac{2p^2}{\varepsilon} \sqrt[p]{\frac{2}{\varepsilon}} \ .$$

On aura donc aussi:

$$\frac{k^p}{m^p} < \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

La différence des sommes (3) et (4) sera donc, pour

$$m > 2p \qquad \text{et} \qquad > \frac{2p^2}{\varepsilon} \sqrt[p]{\frac{2}{\varepsilon}},$$

moindre que

$$\sum_{k=0}^{m} \varepsilon \binom{m}{k} x^k (1 - x)^{m-k} = \varepsilon,$$

d'où on tire qu'elle tend uniformément vers zéro.

SUR UNE LOI CORRECTIVE DE LA LOI DE NEWTON POUR LA DÉTERMINATION DU DÉPLACEMENT DU PÉRIHÉLIE ET DE LA DÉVIATION DES RAYONS LUMINEUX [1]

PAR

M. I. TZÉNOFF (Sofia).

---

1. — Dans cet article nous nous posons le problème suivant: en prenant comme point de départ la seconde loi du mouvement de Newton (la variation de la quantité de mouvement est égale, en grandeur et en direction à la force appliquée au point matériel) déterminer le mouvement d'un point matériel de masse variable m, attiré suivant la loi de Newton par un centre fixe de masse M (par exemple le Soleil), en supposant que la masse variable m ne dépend que de la distance r du point au centre et que, pendant toute la durée du mouvement, l'intégrale de la force vive existe. La demi-force vive ou l'énergie cinétique du point est donnée par la formule $mc^2 - m_0c^2$ (valable pour les petites et pour les grandes

[1] A propos de l'article de M. G. MANEFF, « Considération substantielle de la Gravitation », imprimé dans les *Annales de l'Université de Sofia*, 1930-31.