

# SUR LA COURBE D'ARCHYTAS

Autor(en): **d'Ocagne, M.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1932)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-24621>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

On sait, en effet, que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \varphi}} d\varphi = \frac{\pi}{4} G\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2, \frac{r^2}{l^2}\right),$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{2} G\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2, \frac{r^2}{l^2}\right) \frac{h^2 r^2}{l} \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{r^2}{l^2} \left(1 + \frac{3}{8} \frac{r^2}{l^2} + \frac{15}{32} \frac{r^4}{l^4} + \dots\right) h^2 l. \end{aligned}$$

Si l'on se borne aux trois premiers termes du développement, on trouve, pour  $\frac{r}{l} = \frac{1}{2}$  (c'est-à-dire  $\theta = 30^\circ$ )

$$V = 0,43527 h^2 l.$$

Le coefficient numérique ne diffère que de 0,00131 de celui obtenu plus haut pour cette même valeur de  $\theta$ .

---

## SUR LA COURBE D'ARCHYTAS

PAR

M. D'OCAGNE Membre de l'Institut, (Paris).

---

1. — La courbe d'Archytas est une des rares courbes gauches algébriques qui aient été connues dans l'antiquité, peut-être même celle qui l'a été le plus anciennement. Elle a, comme on sait, été imaginée environ quatre cents ans avant l'ère chrétienne par le géomètre grec dont elle porte le nom pour résoudre le problème déliaque, autrement dit de la duplication du cube.

On peut la définir ainsi: ayant pris, sur l'axe  $Ox$  du trièdre trirectangle  $Oxy$ , le segment  $OA = a$ , on considère les cercles  $\gamma$  et  $\gamma_0$  décrits sur  $OA$  comme diamètre respectivement dans les

plans  $Oxy$  et  $Oxz$ ; la courbe d'Archytas est la courbe d'intersection du cylindre dont  $\gamma$  est la section droite et du tore d'axe  $Oz$  dont  $\gamma_0$  est le méridien.

2. — Les équations de ces surfaces sont

$$x^2 + y^2 - ax = 0$$

et

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0 .$$

La projection de cette courbe sur le plan  $Oxz$  s'obtient immédiatement par l'élimination de  $x^2 + y^2$  entre ces deux équations. Si l'on remplace, dans l'équation ainsi formée,  $z$  par  $y$ , on a l'équation du rabattement  $\gamma_1$  de cette projection sur le plan  $Oxy$

$$(y^2 + ax)^2 - a^3x = 0 . \quad (1)$$

La relation entre cette quartique  $\gamma_1$  et le cercle  $\gamma$  est des plus simples: *le point  $M_1$  de  $\gamma_1$  qui a même abscisse que le point  $M$  de  $\gamma$  a même ordonnée que le point de  $\gamma$  dont l'abscisse est égale à  $OM$ .*

On voit immédiatement que la quartique  $\gamma_1$  est inscrite dans le même carré que le cercle  $\gamma$ , carré dont un côté est placé sur  $Oz$ . De plus, si  $B$  et  $B'$  sont les points de contact de  $\gamma$  avec les côtés de ce carré qui sont parallèles à  $Ox$  et coupent  $Oz$  en  $T$  et  $T'$ , *les points de contact  $D$  et  $D'$  de  $\gamma$ , avec ces mêmes côtés sont les milieux de  $BT$  et  $B'T'$ .*

En  $O$ , la courbe  $\gamma_1$  a quatre points confondus avec  $Oy$ , donc un méplat en ce point.

Enfin, si  $C$  est le centre du cercle  $\gamma$ , *le centre de courbure de  $\gamma_1$  pour le point  $A$  est le milieu du rayon  $CA$ , le centre de courbure pour chacun des points  $D$  et  $D'$ , le milieu du rayon  $OC$ .*

La démonstration de ces diverses propositions peut constituer d'utiles exercices pour des élèves.

3. — Proposons-nous maintenant de trouver l'aire  $S$  contenue à l'intérieur de  $\gamma_1$ . On a

$$S = 2 \int_0^a y dx ,$$

$y$  étant donné par l'équation (1), c'est-à-dire

$$S = 2 \int_0^a \sqrt{\sqrt{ax}(a - \sqrt{ax})} dx .$$

Pour obtenir la valeur de cette intégrale, effectuons le changement de variable

$$\frac{a - \sqrt{ax}}{\sqrt{ax}} = t^2 ,$$

d'où

$$\sqrt{ax}(a - \sqrt{ax}) = \frac{a^2 t^2}{(1 + t^2)^2} , \quad dx = \frac{-4t dt}{(1 + t^2)^3} ,$$

Comme, d'autre part, pour  $x = 0$  et  $x = a$ , on a  $t = \infty$  et  $t = 0$ , il vient, par cette substitution,

$$S = 8a^2 \int_0^\infty \frac{t^2 dt}{(1 + t^2)^4} .$$

Si l'on pose

$$\int \frac{dt}{(1 + t^2)^n} = T_n ,$$

on voit immédiatement que

$$S = 8a^2 [T_3 - T_4]_0^\infty .$$

Or, par une intégration par parties, on obtient aisément la relation

$$T_n = \frac{t}{(2n - 2)(1 + t^2)^{n-1}} + \frac{2n - 3}{2n - 4} T_{n-1} .$$

Il en résulte, d'une part, que

$$T_3 - T_4 = \frac{-t}{6(1 + t^2)^3} + \frac{T_3}{6}$$

et, d'autre part, que

$$T_3 = \frac{t}{4(1 + t^2)^2} + \frac{3}{4} T_2 ,$$

$$T_2 = \frac{t}{2(1 + t^2)} + \frac{1}{2} T_1 ,$$

d'où, en remarquant que  $T_1 = \text{arc tg } t$ ,

$$T_3 = \frac{t}{4(1+t^2)^2} + \frac{3t}{8(1+t^2)} + \frac{3}{8} \text{arc tg } t .$$

Finalement

$$T_3 - T_4 = \frac{t[3(1+t^2)^2 + 2(1+t^2) - 8]}{48(1+t^2)^3} + \frac{1}{16} \text{arc tg } t .$$

La fraction constituant le premier terme du second membre s'annulant pour  $t = 0$  et  $t = \infty$ , et  $\text{arc tg } t$  prenant les valeurs 0 et  $\frac{\pi}{2}$  pour  $t = 0$  et  $t = \infty$ , la valeur de S est donc

$$S = \frac{\pi}{4} a^2 .$$

C'est l'aire du cercle  $\gamma$ .

La courbe d'Archytas admettant, comme le cylindre et le tore, les plans  $Oxy$  et  $Oxz$  pour plans de symétrie, ce résultat peut s'énoncer comme suit:

*Les projections d'une courbe d'Archytas sur ses deux plans de symétrie ont des aires égales; propriété qui semble n'avoir pas été remarquée jusqu'ici.*

---

## UN CAS PARTICULIER DU THÉORÈME DE CLIFFORD

PAR

G. TZITZÉICA (Bucarest).

---

1. — On connaît le théorème de CLIFFORD, généralisation admirable du théorème de MIQUEL. Celui-ci se rapporte à un quadrilatère: Les cercles circonscrits aux quatre triangles, obtenus en supprimant successivement chaque côté du quadrilatère, passent tous par un même point, le point de Miquel du quadrilatère.

Si on considère, dans un plan, cinq droites, les points de Miquel des cinq quadrilatères, qu'on obtient en laissant de côté successivement chacune des cinq droites, sont situés sur un même cercle.