Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 31 (1932)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR CERTAINES CORRESPONDANCES
Autor: Papillon, Pierre
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-24624

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR CERTAINES CORRESPONDANCES

PAR

Pierre PAPILLON (Prytanée militaire de La Flèche).

---

1. — Il est utile parfois de revenir sur des sujets connus; à de nouvelles lectures se découvrent certains développements, certaines généralisations primitivement inexplorés: c'est ainsi que ces quelques pages sont nées d'un article fort intéressant de M. P. VINCENSINI, publié dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, il y a quelque cinq ans, et que, dernièrement, je relisais [1].

I.

2. — Deux courbes (C) et (C′) étant données, respectivement décrites par les points M et M′, tout point μ qui divise le segment MM′ dans un rapport déterminé a pour lieu géométrique une surface (S_μ) d'équations paramétriques

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \frac{x + ax'}{1 + a}, \\ \eta &= \frac{y + ay'}{1 + a}, \\ \zeta &= \frac{z + az'}{1 + a}; \end{aligned}\right. \tag{1}$$

en ces expressions, les fonctions x, y, z du paramètre u sont les

---

[1] *Sur les couples de contours fermés de même longueur et de même surface;* 6me série, tome II, pages 199-202, 1927.

coordonnées de M, les fonctions x', y', z', du paramètre v, celles de M′ et il est enfin posé

$$a = -\frac{\overline{\mu m'}}{\overline{\mu m}} .$$

Les équations (1), mises sous les formes

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{1+a}x + \frac{2a}{1+a}x'\right], \\ \eta &= \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \zeta &= \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

montrent que (S_μ) est une *surface de translation* [1] dont les courbes fondamentales sont les transformées de (C) et de (C′) dans les homothéties

$$\mathcal{H}\left(O, \frac{a}{1+a}\right)$$

et

$$\mathcal{H}\left(O, \frac{2a}{1+a}\right);$$

les courbes coordonnées forment donc un réseau conjugué, assertion qu'on vérifie, après avoir calculé les dérivées partielles

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{1}{1+a}\cdot\frac{dx}{du}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{a}{1+a}\cdot\frac{dx'}{dv},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et les termes essentiels

$$\left|\begin{aligned} A\, du\,.\,dv &= \frac{a}{(1+a)^2}(dy\,.\,dz' - dz\,.\,dy'), \\ B\, du\,.\,dv &= \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ C\, du\,.\,dv &= \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

$$\left|\begin{aligned} E\, du^2 &= \frac{1}{(1+a)^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2), \\ F\, du\,.\,dv &= \frac{a}{(1+a)^2}(dx\,.\,dx' + dy\,.\,dy' + dz\,.\,dz'), \\ G\, dv^2 &= \frac{a^2}{(1+a)^2}(dx'^2 + dy'^2 + dz'^2), \end{aligned}\right. \tag{3}$$

[1] Sophus LIE: *Mathematische Annalen*, XIV, p. 332.

par l'identique nullité de l'expression

$$\frac{\partial A}{\partial u}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial v}+\frac{\partial B}{\partial u}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial v}+\frac{\partial C}{\partial u}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial v}$$

proportionnelle à

$$\Sigma\,(d^2y\,.\,dz' - d^2z\,.\,dy')\,dx'\ .$$

3. — *Correspondance par surfaces équivalentes.* — L'expression de l'aire élémentaire sur (S_μ) est

$$d\sigma_\mu = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$$

ou

$$d\sigma_\mu = \frac{|a|}{(1+a)^2}\sqrt{\Sigma\,(dy\,.\,dz' - dz\,.\,dy')^2}\ ;$$

elle est donc la même pour les surfaces nées des points μ et μ' tels que

$$\frac{|a|}{(1+a)^2} = \frac{|a'|}{(1+a')^2}$$

c'est-à-dire, a' différant de a, que

$$a\,.\,a' = 1\ :$$

ces points sont contraposés pour le milieu du segment MM'.

4. — *Correspondance par arcs équivalents.* — L'expression de l'arc élémentaire sur (S_μ) est telle que

$$ds_\mu^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,.\,dv + G\,dv^2\ ,$$

soit

$$ds_\mu^2 = \frac{1}{(1+a)^2}\left[(dx^2+dy^2+dz^2) + 2a\,\Sigma\,dx\,.\,dx' + a^2(dx'^2+\ldots)\right]\ .$$

La correspondance précédente ne se poursuit pas en général, les relations

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{(1+a)^2} = \frac{1}{(1+a')^2}\ ,\\ &\frac{a}{(1+a)^2} = \frac{a'}{(1+a')^2}\ ,\\ &\frac{a^2}{(1+a)^2} = \frac{a'^2}{(1+a')^2}\ ,\end{aligned}\right. \qquad (4)$$

n'étant simultanément réalisées que pour

$$a = a' \ ;$$

mais si les arcs conjointement décrits par M et M′ s'équivalent,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2$$

et les égalités

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1 + a^2}{(1 + a)^2} = \dfrac{1 + a'^2}{(1 + a')^2} \\[2ex] \dfrac{a}{(1 + a)^2} = \dfrac{a'}{(1 + a')^2} \end{array} \right. \qquad (5)$$

sont simultanément satisfaites quand

$$a \,.\, a' = 1 \ ,$$

c'est-à-dire avec les couples (μ, μ') contraposés pour le milieu du segment MM′.

5. — *Correspondance conservant la courbure totale.* — Etant posé

$$\rho = \frac{\mathcal{R}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \ ,$$

les rayons de courbures principaux $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont obtenus au moyen de l'équation

$$\rho^2 \Sigma A \frac{\partial (B, C)}{\partial (u, v)} + \rho \ldots + (A^2 + B^2 + C^2) = 0$$

de sorte que la courbure totale de (S_μ) en μ possède la valeur

$$\frac{\sum A \dfrac{\partial (B, C)}{\partial (u, v)}}{(A^2 + B^2 + C^2)^2} = \frac{\dfrac{a^3}{(1 + a)^6}}{\dfrac{a^4}{(1 + a)^8}} \mathcal{F}(u, v) = \frac{(1 + a)^2}{a} \mathcal{F}(u, v) \ ,$$

$\mathcal{F}$ étant une fonction qu'il est inutile ici de préciser; cette courbure est la même pour les surfaces nées des points μ et μ' contra-

posés pour le milieu du segment MM′ car la relation .

$$\frac{(1+a)^2}{a} = \frac{(1+a')^2}{a'}$$

n'est encore vérifiée que si

$$a \,.\, a' = 1 \,.$$

6. — *Conclusion.* — En résumé:

Si deux points M *et* M′ *décrivent deux courbes quelconques données, il s'établit entre les points* μ *et* μ' *de la droite* MM′, *contraposés pour le milieu du segment* MM′, *une correspondance superficielle conservant l'aire et la courbure totale; si, de plus, les arcs simultanément décrits par* M *et* M′ *ont même mesure, de même ceux que décrivent* μ *et* μ'.

Application. — « Imaginons que M et M′ décrivent deux surfaces applicables quelconques (S) et (S′), en restant homologues dans l'application. μ et μ' décrivent alors, d'après ce qui précède, deux surfaces (S_μ) et $(S_{\mu'})$ telles que deux arcs homologues quelconques soient égaux: (S_μ) et $(S_{\mu'})$ sont applicables. A tout couple de surfaces applicables la construction géométrique indiquée ci-dessus en fait donc correspondre une infinité d'autres » *(loc. cit.)*.

7. — Prenons deux courbes (C) et (C′) fermées et de même longueur l, décrites par M et M′ simultanément; la courbe que trace alors μ sur la surface (S_μ) se ferme et sa projection sur le plan xOy limite une aire

$$\int_0^l (\eta\, d\xi - \xi\, d\eta) = \frac{1}{(1+a)^2} \int_0^l \left| \begin{array}{l} (y\,dx - x\,dy) \\ + a\,(y'\,dx + y\,dx' - x'\,dy - x\,dy') \\ + a^2\,(y'\,dx' - x'\,dy') \end{array} \right.$$

en supposant les diverses coordonnées exprimées à l'aide de l'arc de (C), par exemple. Cette aire est la même pour les points μ et μ' dont les paramètres a et a' vérifient précisément les

relations (4); nous les savons incompatibles, a' différant de a. Mais si

$$\int_0^l y\,dx - x\,dy = \int_0^l (y'\,dx' - x'\,dy') ,$$

c'est-à-dire si les projections de (C) et de (C′) sur xOy enferment des surfaces équivalentes, les conditions précédentes font place aux égalités (5), vérifiées pour

$$a \,.\, a' = 1 .$$

Ainsi:

Si deux points M *et* M′ *décrivent simultanément deux courbes fermées de même longueur et dont les projections sur un plan bordent des surfaces équivalentes, les courbes décrites par les points* μ *et* μ' *de la droite* MM′, *contraposés pour le milieu du segment* MM′, *jouissent des mêmes propriétés.*

La proposition s'applique particulièrement au cas de la correspondance par arcs équivalents sur des courbes fermées de même longueur; les lieux de μ et de μ' ont, en outre, même longueur.

II.

8. — Plaçons-nous maintenant dans le domaine de la géométrie plane et soit le point μ transformé du point M′ par l'homothétie-rotation de centre M et de rapport complexe r_α (fig. 1); l'égalité vectorielle

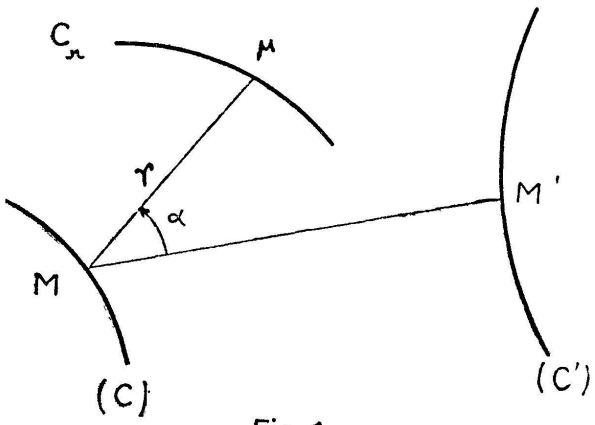

Fig 1

$$\overrightarrow{M\mu} = r_\alpha \,.\, \overrightarrow{MM'}$$

s'écrit encore

$$\overrightarrow{O\mu} = \overrightarrow{OM} + r_\alpha (\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM})$$

et, par suite,

$$\xi + i\eta = (x + iy) + (r \cos \alpha + ir \sin \alpha)\,[(x' - x) + i(y' - y)]:$$

finalement, les coordonnées de μ sont

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= x + r[(x' - x)\cos\alpha - (y' - y)\sin\alpha] , \\ \eta &= y + r[(x' - x)\sin\alpha + (y' - y)\cos\alpha] . \end{aligned}\right.$$

Par suite

$$\frac{\partial\xi}{\partial u} = \frac{dx}{du} + r\left(-\frac{dx}{du}\cos\alpha + \frac{dy}{du}\sin\alpha\right) ,$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial v} = r\left(\frac{dx'}{dv}\cos\alpha - \frac{dy'}{dv}\sin\alpha\right) ,$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial u} = \frac{dy}{du} + r\left(-\frac{dx}{du}\sin\alpha - \frac{dy}{du}\cos\alpha\right) ,$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial v} = r\left(\frac{dx'}{dv}\sin\alpha + \frac{dy'}{dv}\cos\alpha\right) ,$$

et les coefficients, pour cette surface plane que décrit le point μ, sont

$$\left|\begin{aligned} &A = 0 , \\ &B = 0 , \\ &C\,du\,dv = r\sin\alpha\,(dx\,dx' + dy\,dy') + r(\cos\alpha - r)(dx\,dy' - dy\,dx') \end{aligned}\right.$$

$$\left|\begin{aligned} &E\,du^2 = (r^2 - 2r\cos\alpha + 1)(dx^2 + dy^2) , \\ &F\,du\,.\,dv = r(\cos\alpha - r)(dx\,dx' + dy\,dy') - r\sin\alpha\,(dx\,dy' - dy\,dx'), \\ &G\,dv^2 = r^2(dx'^2 + dy'^2) . \end{aligned}\right.$$

9. — *Correspondance par surfaces équivalentes.* — La surface élémentaire décrite par μ sur le plan a pour aire

$$d\sigma_\mu = |C\,du\,dv|$$

ou bien

$$d\sigma_\mu = |r\sin\alpha\,(dx\,dx' + dy\,dy') + r(\cos\alpha - r)(dx\,dy' - dy\,dx')| .$$

Cette aire est la même pour les points μ et μ' tels que

$$\left\{\begin{aligned} &r\sin\alpha = \pm r'\sin\alpha' , \\ &r(\cos\alpha - r) = \pm r'(\cos\alpha' - r') , \end{aligned}\right.$$

ou que

$$\frac{r}{\sin\alpha'} = \frac{r'}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin(\alpha + \alpha')} ;$$

il est immédiat de constater que les points μ et μ' ainsi définis sont contraposés pour la médiatrice du segment MM'.

10. — *Correspondance par arcs équivalents.* — L'expression de l'arc élémentaire décrit par μ sur le plan est telle que

$$ds_\mu^2 = \left| \begin{array}{l} (r^2 - 2r\cos\alpha + 1)(dx^2 + dy^2) \\ + 2[r(\cos\alpha - r)(dx\,dx' + dy\,dy') - r\sin\alpha(dx\,dy' - dy\,dx')] \\ + r^2(dx'^2 + dy'^2) \ . \end{array} \right.$$

La correspondance précédente ne se poursuit pas en général, car les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} r^2 - 2r\cos\alpha + 1 = r'^2 - 2r'\cos\alpha' + 1 \ , \\ r(\cos\alpha - r) = r'(\cos\alpha' - r') \ , \\ r\sin\alpha = r'\sin\alpha' \ , \\ r^2 = r'^2 \ , \end{array} \right. \tag{6}$$

qui se réduisent d'ailleurs aux trois dernières, n'admettent que la seule solution

$$r = r' \ , \qquad \alpha = \alpha' + 2k\pi \ .$$

Mais si les arcs simultanément décrits par M et M' ont même longueur,

$$dx^2 + dy^2 = dx'^2 + dy'^2$$

et les égalités

$$\left\{ \begin{array}{l} r(\cos\alpha - r) = r'(\cos\alpha' - r') \ , \\ r\sin\alpha = r'\sin\alpha' \ , \end{array} \right. \tag{7}$$

sont satisfaites dans les conditions du paragraphe 9.

Une autre correspondance par arcs équivalents s'obtient encore en supposant parallèles les tangentes en M et M'; ceci entraîne

$$dx\,dy' - dy\,dx' = 0$$

et supprime la troisième relation (6), donnant un système de solution

$$r = r' \ , \qquad \alpha = -\alpha' + 2k\pi \ :$$

les μ et μ' sont contraposés pour la droite MM'.

11. — *Conclusion.* — En résumé:

Si deux points M *et* M′ *décrivent deux courbes quelconques données d'un plan, il s'établit entre les points* μ *et* μ', *contraposés pour la médiatrice du segment* MM′, *une correspondance conservant l'aire; si, de plus, les arcs simultanément décrits par* M *et* M′ *ont même mesure, de même ceux que décrivent* μ *et* μ'.

12. — En supposant les courbes (C) et (C′) fermées, de même longueur et simultanément décrites par les points M et M′, la courbe qu'engendre μ se ferme et l'aire incluse a pour expression

$$\int_0^l \eta\, d\xi - \xi\, d\eta \ ,$$

l'élément différentiel étant une fonction de l'arc de (C), par exemple. Un calcul long mais fort simple transforme l'intégrale définie en

$$\begin{aligned}
&(r^2 - 2r\cos\alpha + 1)\int_0^l (y\,dx - x\,dy) \\
&+ r(\cos\alpha - r)\int_0^l (y\,dx' - x\,dy' + y'\,dx - x'\,dy) \\
&- r\sin\alpha\int_0^l (y\,dy' - y'\,dy + x\,dx' - x'\,dx) \\
&+ r^2\int_0^l (y'\,dx' - x'\,dy') \ .
\end{aligned}$$

L'aire est la même pour les points μ et μ' répondant précisément aux relations (5); de là une conclusion analogue à celle du paragraphe 10. Si

$$\int_0^l y\,dx - x\,dy = \int_0^l (y'\,dx' - x'\,dy') \ .$$

c'est-à-dire si les aires qu'enferment (C) et (C′) sont égales, (6) est remplacé par (7): les points μ et μ' sont contraposés pour la médiatrice du segment MM′.

Ainsi:

Si deux points M *et* M′ *décrivent simultanément deux courbes fermées d'un plan, de même longueur et bordant des surfaces équivalentes, les courbes décrites par les points* μ *et* μ', *contraposés pour la médiatrice du segment* MM′, *sont fermées et bordent des surfaces équivalentes.*

La proposition s'applique particulièrement au cas de la correspondance par arcs équivalents sur des courbes fermées de même longueur; les lieux de μ et de μ' ont, en outre, même longueur.

Juillet 1932.

SUR LA SOMMATION DES SÉRIES DIVERGENTES PAR LES MOYENNES GÉNÉRALISÉES

PAR

Nikola OBRECHKOFF (Sofia, Bulgarie).

Soit $c_0, c_1, c_2, \ldots,$ des nombres donnés et supposons que les nombres

$$C_n = \sum_{\mu=0}^{n} c_\mu$$

sont différents de zéro. La série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{1}$$

est sommable par les moyennes généralisées si l'expression

$$\delta_n = \frac{c_0 s_0 + c_1 s_1 + \ldots + c_n s_n}{C_n}, \qquad s_n = \sum_{\mu=0}^{n} a_\mu ,$$