

propos d'un catalogue paradoxal.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1932)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

A propos d'un catalogue paradoxal.

1. *Lettre de M. Winants.*

C'est avec le plus vif intérêt que j'ai lu le captivant article que M. GONSETH vient de publier sous le titre « La vérité mathématique et la réalité » (*L'Enseignement mathématique*, 31, 1932, pp. 96-114).

Se trouvant devant une immense bibliothèque, l'auteur conçoit que l'on peut en classer les livres de différentes manières, dont chacune lui suggérera l'idée de dresser un catalogue. Puis il constate que certains de ces catalogues se mentionnent eux-mêmes, tandis que les autres ne le font pas. C'est alors (p. 103) qu'il s'arroge le droit d'imaginer « le catalogue de tous les catalogues qui ne se mentionnent pas ». Il prétend que la logique ne contient aucune règle qui lui défende de définir ce catalogue paradoxal.

C'est ici que je crois bien qu'il se trompe. D'après le principe du tiers exclu, le catalogue de M. Gonseth doit se mentionner soi-même ou ne pas se mentionner: chacune de ces deux alternatives implique contradiction. L'auteur exagère, me semble-t-il, quand il nous affirme que son catalogue va coopérer à la ruine de la logique classique. La bonne vieille logique, au contraire, nous permet d'affirmer que ce catalogue ne peut pas exister; sa définition renferme une contradiction flagrante.

Suivant qu'on est progressiste ou traditionaliste, on adoptera le point de vue de M. Gonseth ou le mien. Comme ces deux points de vue sont opposés, on pourrait tenter une expérience, on pourrait essayer de réaliser le fameux catalogue. J'ai l'impression que l'expérience donnera raison à la logique traditionnelle.

Liège, le 10 avril 1933.

Marcel WINANTS.

2. Réponse de M. Gonseth à M. Winants.

La remarque critique de M. WINANTS me paraît renfermer plusieurs malentendus. Je m'en vais tenter de les faire apparaître.

M. Winants semble croire tout d'abord que la bonne vieille logique est une personne qui n'a jamais varié d'opinion. Est-ce vraiment le cas ? Imaginons le dialogue suivant :

La bonne vieille logique : De toute propriété que je reconnais, je dis qu'elle a son contraire et que la propriété et son contraire s'excluent.

L'élève : Reconnaissez-vous la propriété « de mentionner » ? Par exemple, pour un catalogue, de mentionner les *Eléments* d'Euclide.

La logique : Je n'y vois pas d'inconvénient. On sait ce que mentionner veut dire, et on ne peut à la fois mentionner et ne pas mentionner.

L'élève : Défendez-vous qu'un catalogue se mentionne lui-même ?

La logique : Comment le ferais-je puisque la réalité le permet.

Sur quoi l'élève se met à dresser le catalogue Γ des catalogues C déjà existants qui ne se mentionnent pas eux-mêmes, opération qui ne lui cause aucun embarras. C'est seulement en dernier lieu, son travail terminé, qu'il se pose la question : Le catalogue Γ que voici va-t-il aussi se mentionner lui-même ? Il se rend compte alors qu'il lui est impossible de mentionner *tous* les catalogues C et rien que ceux-là : ou bien Γ sera de trop ou bien il manquera.

(M. Winants propose de tenter l'expérience. Pourquoi ? L'expérience est faite d'avance. Le catalogue Γ n'existe pas, et personne ne prétend le réaliser. Je ne vois pas comment la logique traditionnelle en tirera avantage, puisque c'est justement cette impossibilité de le réaliser qui va causer des embarras.)

L'élève revient se plaindre à la logique : J'ai imaginé un catalogue Γ de tous les catalogues qui ne se mentionnent pas eux-mêmes.

Tous les mots de cette définition, vous avez accepté par avance qu'ils ont un sens déterminé, et que leur emploi est légitime. Mais à mon étonnement, l'objet ainsi défini ne se laisse pas réaliser. Que dois-je en conclure ?

Pendant quelques instants, la logique se trouve dans un cruel embarras, car elle avait cru elle-même que le réel ne viendrait jamais s'inscrire en faux contre les constructions mentales qu'elle avait permises.

(Ce n'est naturellement pas dans cette position que M. Winants voit la logique traditionnelle. Mais personne ne soutiendra que la logique ne l'ait pas prise. C'est l'incompatibilité de cette position avec l'expérience qui fait le fond des apories bien connues et dont le catalogue Γ n'est qu'une forme à peine nouvelle.)

Mais la logique est une personne qui tient à avoir raison en toutes circonstances. Elle voit bientôt qu'elle n'y parviendra que par une volte-face.

La logique: Je vois qu'il faut que je m'explique. Les règles que j'ai formulées sont intangibles. Mais il est vrai que, dans certains cas, il peut être malaisé de découvrir si elles sont applicables. Ainsi, dans notre cas, tu as pu te rendre compte toi-même que l'objet Γ n'y satisfait pas. Note bien ceci: Je ne reconnais comme légitimes que les constructions qui satisfont à mes lois.

(Nous serions arrivés à la position de M. Winants, qui est aussi la position axiomatique habituelle de la Théorie des ensembles.)

L'élève: Je comprends. La définition que j'ai imaginée n'est pas acceptable, parce que l'essai de la réaliser a mis à jour que les règles ne sont pas respectées. En d'autres termes, pour qu'on soit sûr qu'un objet logique qu'on vient d'imaginer soit réalisable, il faut avoir vu que sa définition ne conduit à aucune contradiction.

La logique: C'est cela même.

(M. Winants prétend que maintenant l'élève et tout le monde doivent être satisfaits.)

Après quelque temps, l'élève sent cependant ses doutes renaître.

L'élève: Vos dernières explications ont ébranlé ma confiance. Vous m'avez interdit d'imaginer des objets et de les doter de propriétés telles qu'on en puisse déduire une dérogation aux règles que vous avez posées, par exemple au principe du tiers exclu. Me voici donc au clair: chaque fois qu'une semblable dérogation se produit, je suis en état d'affirmer que cet objet n'existe pas. Mais quelle doit être mon attitude, lorsque je n'ai rencontré aucune contradiction. Les conséquences des définitions sont en nombre indéterminé. Tant que je ne les aurai pas toutes examinées — ce qui est impossible — je ne pourrai pas me défaire du soupçon que l'une d'elles est peut-être contradictoire. La seule certitude que je puisse avoir concerne les objets logiquement inacceptables. Mais je n'oserai jamais affirmer d'un seul objet qu'il est logiquement acceptable. Je n'ose pas invoquer l'évidence, car vous l'avez dit vous-même, elle peut être trompeuse. Vos règles sont intangibles, mais ne vous êtes-vous pas retranché du réel?

(L'impossibilité de réaliser le catalogue Γ pose donc le dilemme suivant:

- ou bien la logique doit savoir par avance quelles sont les notions et les objets logiques qu'elle reconnaît comme légitimes, et dans ce cas, la considération du catalogue Γ parle contre elle, car elle n'en a reconnu l'impossibilité qu'après coup;
- ou bien elle en est réduite à porter ses jugements après coup, et dans ce cas elle est aussi réduite à l'impuissance.

Il faut voir les deux parties du dilemme. M. Winants n'échappe à la première que pour tomber dans la seconde.

D'ailleurs, ce n'est pas vouloir la ruine de la logique classique que d'en rechercher le domaine « naturel d'extension » et de chercher à en

abstraire les caractères d'une « logique des liaisons » ou d'une « logique des objets en devenir », dans laquelle il soit possible d'éviter *a priori* les apories et les antinonies bien connues.

Qu'il me soit encore permis, sous la forme commode du dialogue, d'esquisser mon point de vue.

La logique reconnaît qu'en voulant tout sauver de son prestige, elle s'est mise dans une position incommode. Elle fait la part du feu.

La logique: Je vois que tu ne renieras pas mon autorité si je t'en dis les limites. Mes lois ne touchent pas directement le réel. Les objets que tu te représentes ne sont pas non plus absolument adéquats au réel; ils n'y correspondent que d'une façon sommaire et schématique. Appelle « objets aristotéliens » les objets que tu te représentes comme dotés de propriétés *a priori*, selon lesquelles tu les classes et tu les juges. Mes lois sont ce que tu pourrais appeler « les lois naturelles » de ce monde schématisé des objets aristotéliens.

L'élève: Je me sens à la fois déçu et tranquilisé. Mais n'existe-t-il pas, je veux dire n'avons-nous pas l'idée d'objets qui ne puissent être dits aristotéliens ? Et votre juridiction ne les atteint-elles pas ?

La logique: Je te dirai une autre fois comment je puis me transformer en une logique des objets en devenir, et sans détermination préalable. Quand tu l'auras conçue, tu verras disparaître les difficultés qui t'ont arrêté¹.

Zurich, 15 mai 1933.

F. GONSETH.

Sur la logique intuitionniste.

Réponse à MM. Barzin et Errera.

Je suis parfaitement disposé à m'expliquer plus en détail sur la contradiction que vous croyez avoir trouvée dans la logique intuitionniste, d'autant plus que vos dernières explications (voir ce journal, XXXI, p. 122) mettent clairement en lumière le point où, à mes yeux, votre raisonnement est en défaut.

Dans mon travail sur la logique formelle (*S.-B. preuss. Akad. Wiss.* 1930, p. 42) je n'emploie qu'une seule négation qui signifie l'impossible. Il s'en suit que dans tous les énoncés qu'on peut tirer de ce travail la négation doit avoir cette signification. Ainsi, votre interprétation du théorème: « Il est impossible qu'il existe une proposition qui ne soit *ni vraie ni fausse* » est incorrecte, *ni* devant être interprété dans le sens de l'impossibilité. D'autre part, comme vous le remarquez, dans l'énoncé: « le principe du tiers exclu n'est

¹ F. GONSETH. Sur l'axiomatique de la théorie des ensembles, et sur la logique des relations. *Commentarii math. helv.*, vol. 5, 1933, p. 108-136.