SUR L'AXIOME DE DROITES PARALLÈLES

Autor(en): **Amira, D.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1933)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-25318

SUR L'AXIOME DE DROITES PARALLÈLES

PAR

D. AMIRA (Genève).

Si, dans le système d'axiomes donné par HILBERT [1], on plaçait l'axiome de droites parallèles (groupe IV) après les axiomes de continuité (groupe V), on constituerait, en excluant l'axiome de droites parallèles, un système général d'axiomes d'une géométrie absolue. En y ajoutant l'axiome de droites parallèles on obtiendra la géométrie euclidienne.

M. R. BALDUS, dans son ouvrage: « Nichteuklidische Geometrie [2] », a démontré pour la planimétrie qu'en adoptant cet ordre, on peut réduire l'axiome de droites parallèles, notamment en admettant cet axiome pour *une seule* droite d'un plan donné et *un seul* point situé en dehors [3] de cette droite.

En langage abrégé, au lieu de: *g* étant une droite donnée et P un point donné non situé sur *g*, il existe *exactement* une droite contenant P, qui est parallèle à *g*, nous dirons: P se rapporte à *g* d'une manière euclidienne [4].

M. R. BALDUS, en admettant l'existence d'une seule droite *g* et d'un seul point P qui se rapporte à *g* d'une manière euclidienne, démontre EN RECOURANT A L'AIDE DE L'AXIOME D'ARCHIMÈDE [5] que *tout* point se rapporte à *toute* droite, ne le contenant pas, d'une manière euclidienne.

---

[1] *Grundlagen der Geometrie*, 7me édition, 1930.
[2] *Sammlung Göschen*, 1927.
[3] Un point situé en *dehors* d'une droite veut dire qu'il n'est pas situé *sur* la droite.
[4] J'ai traduit le langage de M. R. Baldus.
[5] Axiome V_1 chez HILBERT, donné sous forme réduite chez R. BALDUS (Axiome IV_1)

Qu'il me soit permis ici de démontrer, non seulement pour la planimétrie, mais aussi pour la géométrie dans l'espace, ce théorème de droites parallèles SANS RECOURIR A L'AXIOME D'ARCHIMÈDE.

Admettons la *définition* de droites parallèles:

Deux droites a et b sont dites « *parallèles* », si elles sont situées dans un même plan et n'ont pas de point commun.

Supposons ensuite connu le théorème:

Etant donné une droite d et un point P situé en dehors de d, il existe *au moins* une droite p qui contenant P est parallèle à d.

L'axiome de droites parallèles sera par suite énoncé de la manière suivante:

AXIOME *(de droites parallèles) :* Il existe *une* droite d et *un* point P, situé en dehors de d et « AU PLUS » une droite p, qui contenant le point P est parallèle à d.

La proposition générale sera ensuite donnée par le:

THÉORÈME *(de droites parallèles) :* Etant donnée une droite *quelconque* a, et un point *quelconque* B, situé en dehors de a, il existe « *au plus* » une droite b, qui contenant B est parallèle à a.

Démonstration. — Soient, la droite d, le point P et la droite p donnés par l'axiome.

Examinons les cas suivants:

1. Soit a une droite *quelconque* distincte de d, située ou non dans le plan des droites d et p, et soit l une droite distincte de p, qui étant située dans le plan des droites d et p et contenant le point P, coupe d en D. Soit δ, un des angles intérieurs [1] que la droite l fait avec d.

Prenons un point quelconque A sur a et une demi-droite c d'origine A qui fait avec l'une des demi-droites d'origine A, contenues dans a, un angle $\alpha \cong \delta$. (Voir fig. 1.)

Prenons ensuite le point B sur c de manière que $\overline{AB} \cong \overline{DP}$.

Soit φ l'angle qui fait avec δ des angles alternes internes et soit b' la demi-droite d'origine B, qui fait avec BA un angle $\beta \cong \varphi$ et avec α des angles alternes internes.

[1] Les angles dont un des côtés contient le segment $\overline{DP}$.

Nous allons démontrer que la droite *b* contenant *b'* est parallèle à *a* et qu'elle est la seule parallèle, c'est-à-dire que notre théorème est vrai pour *a* et B.

Pour démontrer que *b* est parallèle à *a*:

Soit dans le cas contraire, S le point commun de *a* et de *b*, et soit, pour fixer les idées, S situé [1] sur *b'*. On prendra alors le

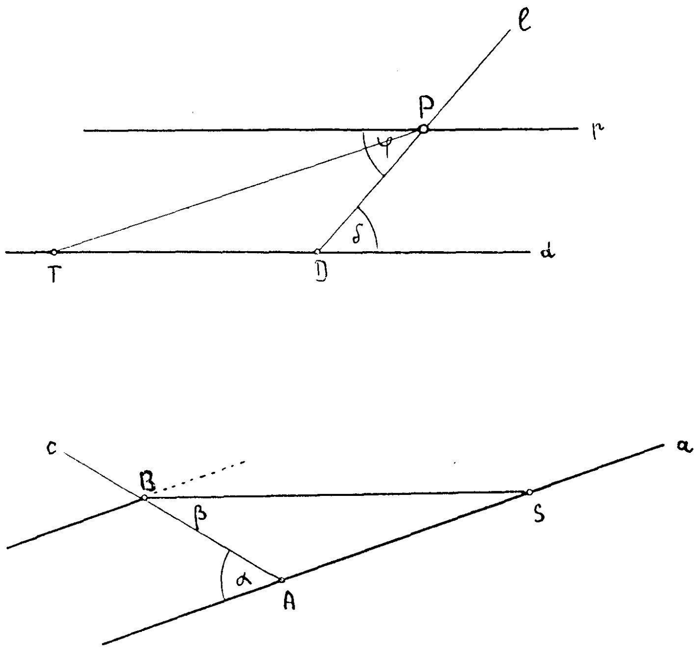

Fig. 1.

point T, situé sur *d* dans le même demi-plan par rapport à *l* que le côté de l'angle φ contenu [2] dans *p*, de manière que [3] $\overline{DT} \cong \overline{AS}$.

On obtient ainsi : $\Delta\ ABS \cong \Delta\ DPT$ (par l'axiome III_5 de Hilbert) et par conséquent $\sphericalangle\ DPT \cong \beta$, et de $\beta \cong \varphi$ résulte [4]: $\sphericalangle\ DPT \cong \varphi$.

Mais ces angles ayant un côté (contenant $\overline{PD}$) commun (et il est facile de se rendre compte du fait que leurs seconds côtés sont situés dans un même demi-plan par rapport à la droite portant

[1] Le raisonnement est analogue dans le cas où S est situé sur la demi-droite opposée.

[2] La notion: des points situés de même côté par rapport à une droite donnée, ainsi que la notion d'un demi-plan sont bien fondées.

[3] L'existence d'un tel point T est assuré par l'axiome III_1 de Hilbert.

[4] Cette propriété de transitivité se démontre à l'aide des axiomes de congruence.

le côté commun), ne peuvent être congruents que si PT coïncide avec la parallèle p (axiome III_4 chez Hilbert), c'est-à-dire qu'un point commun T ne peut pas exister. Par conséquent l'existence d'un point S commun à a et b n'est pas possible.

Pour démontrer que b est la seule parallèle à a, soit dans le cas contraire b^* une seconde droite, qui contenant B est parallèle à a, et soit β^* l'angle ayant avec β le côté c commun et le second côté situé, par rapport à la droite portant c, dans le même demi-plan que celui de β. Prenons une demi-droite p'^* faisant avec l un angle $\varphi^* \cong \beta^*$ et située, par rapport à l, dans le même demi-plan que le côté de l'angle φ contenu dans p. La droite p^* contenant p'^* sera alors distincte de p et parallèle à d, ce qui est en contradiction avec l'axiome de droites parallèles.

2. Nous allons démontrer ensuite que le théorème de droites parallèles étant vrai pour la droite d et le point P donnés par l'axiome, il sera aussi vrai pour cette droite d et un autre point *quelconque* Q, situé en dehors de d et en dehors du plan déterminé par d et P.

Pour cela, soit α le plan déterminé par d et P, et β le plan déterminé par d et Q, et soit p la seule droite qui contenant P est parallèle à d (donnée par l'axiome). Soit ensuite γ le plan déterminé par p et Q (fig. 2). Le plan γ ayant le point Q commun avec β aura une droite q commune avec β (résulte de l'axiome I_7 de Hilbert).

Il est facile de constater que q est parallèle à p, car p étant située dans le plan α, et q dans β, leur point commun ne peut être situé que sur d, ce qui n'est pas possible, car la droite p est parallèle à d.

Il est aussi clair que q est parallèle à d, car q étant située dans le plan γ et d dans α, leur point commun ne peut être situé que sur la droite commune p, ce qui est impossible, car nous avons démontré que q est parallèle à p.

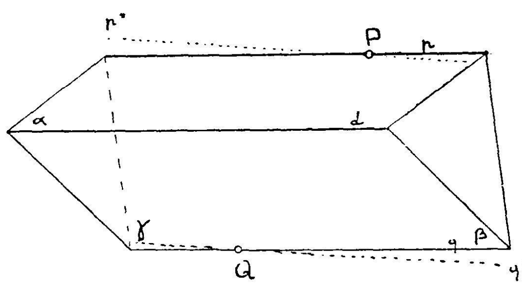

Fig. 2.

Soit maintenant q^*, une seconde droite distincte de q, qui contenant Q est parallèle à d, elle sera située dans le plan β, et en dehors[1] de γ, et par conséquent ne sera pas située dans un même plan avec p. Soit alors γ^* le plan déterminé par q^* et P. Ce plan, ayant le point P commun avec le plan α aurait une droite p^* distincte de p, commune avec α, qui serait en vertu du raisonnement précédent aussi parallèle à d, ce qui serait en contradiction avec le donné.

Il en résulte que la droite q contenant Q est la *seule* parallèle à d.

3. Il est clair que notre théorème étant vrai pour d et Q, le sera également pour d et pour *tout* point P*, distinct de P, qui est situé en dehors de d et dans le plan déterminé par d et P.

Donc notre théorème est vrai pour la droite d et pour *tout* point situé en dehors de d.

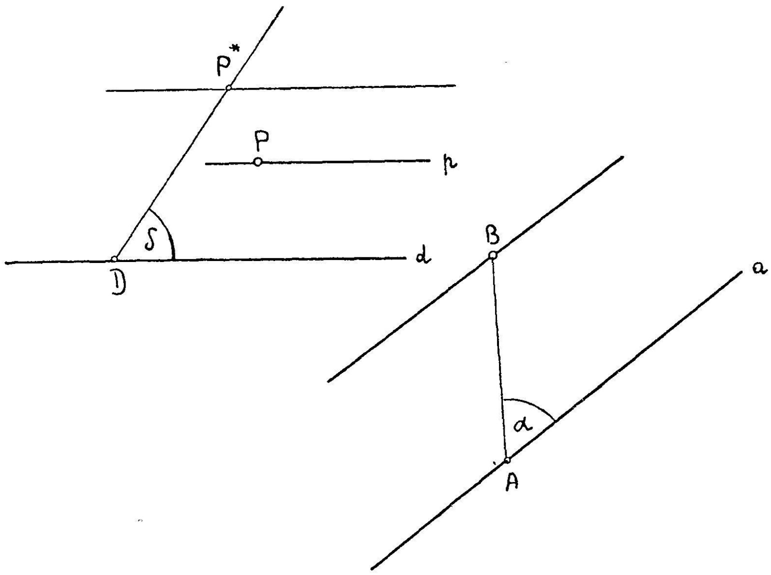

Fig. 3.

Nous pouvons enfin démontrer que le théorème de droites parallèles est vrai pour TOUTE droite a (située ou non dans le plan déterminé par d et P) et pour TOUT point B situé en dehors de a.

En effet, soient, encore une fois, la droite d, le point P et la parallèle p, donnés par l'axiome, et une droite *quelconque* a et un point *quelconque* B situé en dehors de a (fig. 3).

Prenons un point quelconque A sur a et soit α un angle que

[1] Car β et γ n'ont que la droite q commune.

fait avec a la demi-droite d'origine A contenant B. Prenons de même un point quelconque D sur d et une demi-droite quelconque (située ou non dans le plan donné par d et P), qui fait avec d un angle $\delta \cong \alpha$. Prenons ensuite sur cette demi-droite le point P* (qui peut ou non coïncider avec P), de manière que:

$$\overline{\mathrm{DP}^*} \cong \overline{\mathrm{AB}} .$$

En considérant les cas 2 et 3 il est certain que notre théorème (étant vrai pour d et P), est vrai pour d et P*. On retombe ainsi sur le cas 1 et le théorème de droites parallèles est entièrement démontré.

Juillet 1933.

SUR UNE FORMULE PARTICULIÈRE DE QUADRATURE GÉOMÉTRIQUE

PAR

L. Decouflé (Alger).

Considérons une courbe S, subissant dans un plan fixe XOY un mouvement de translation représenté par la trajectoire T d'un de ses points C.

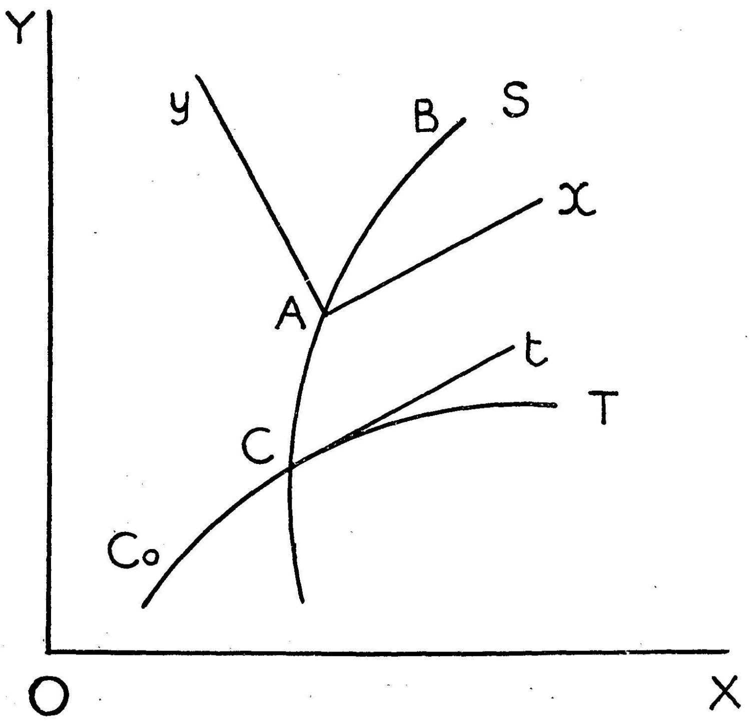

Fig. 1.