

**Monografie Matematyczne. Comité de
Rédaction: S. Banach. B. Knaster, K.
Kuratowski, S. Mazurkiewicz, W. Sierpinski, H.
Steinhaus. — Volumes gr. in-8° (26 x 18). Pour
l'achat: Seminar. Matem. Univ., Oczki Nr. 3,
Warszawa (Varsovie, Pologne) ou bien verse...**

Autor(en): **Buhl, A.**

Objekttyp: **BookReview**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1933)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

vingtième siècle. Il nous montre Newton d'abord traité, en France, au nom de Descartes, comme Einstein le fut il y a quinze ans. Cela n'empêcha ni Laplace ni Le Verrier.

Tout le chapitre second est consacré à Henri Poincaré. Le troisième va de M. Emile Picard à la trinité Borel, Hadamard, Painlevé et à toute la pléiade d'élèves dont tant ont uniquement gravité autour du théorème essentiel dû précisément à M. Picard. Ici, ce sont les équations sans racines qui ont ouvert le domaine de l'extraordinaire. Baire et Lebesgue créent véritablement la Théorie des Fonctions de variables réelles. La Géométrie proprement dite (Ch. IV) est rattachée aux travaux de Darboux, la Physique mathématique (Ch. V) à Duhem, le Calcul des Probabilités au grand Traité de M. Borel, la Philosophie et l'Histoire (Ch. VI) sont vues à travers les écrits de Poincaré et de Duhem.

Mais le plus curieux est que, sans perdre de vue ces grandes lignes, M. Sergescu ait trouvé le moyen de citer plusieurs centaines de noms, de rendre hommage à des disciples restés en seconde zone mais cependant non sans mérite comme ayant beaucoup travaillé avec la dose d'intelligence qui leur était départie. Le tableau résultant est ainsi d'une minutie frappante.

Que l'on me permette une petite malice. L'ouvrage étant orné de beaux portraits, j'y trouve, page 21, M. Emile Picard ressemblant étrangement à Gaston Darboux et, page 89, un Gaston Darboux qui, un jour, a dû s'amuser à se camoufler jusqu'à obtenir une ressemblance non moins étrange avec M. Emile Picard. Et encore, non ! L'explication ne doit pas être si compliquée ! Ce n'est jamais qu'un groupe de permutations qui a joué mal à propos. D'ailleurs, cela n'est peut-être arrivé que dans quelques exemplaires.

A. BUHL (Toulouse).

Monografie Matematyczne. Comité de Rédaction: S. BANACH, B. KNASTER, K. KURATOWSKI, S. MAZURKIEWICZ, W. SIERPINSKI, H. STEINHAUS. — Volumes gr. in-8° (26 × 18). Pour l'achat: Seminar. Matem. Univ., Oczki Nr. 3, Warszawa (Varsovie, Pologne) ou bien versement à P. K. O., Nr. 45.177. Prof. Dr K. Kuratowski. Lwów.

Une magnifique collection de Monographies mathématiques vient de naître en Pologne. Les langues prévues pour la rédaction des volumes sont le français, l'allemand, l'anglais ou l'italien. Les trois premiers, analysés très brièvement ci-après, sont rédigés en français. Voilà qui n'est pas fait pour nous déplaire et qui rend éloquemment hommage aux protagonistes des théories en litige, le très regretté René Baire allié à MM. Emile Borel et Henri Lebesgue. Ceux-ci ont été continués, en France, par MM. Arnaud Denjoy et Maurice Fréchet, ailleurs, par une brillante pléiade de mathématiciens dont les principaux forment le Comité de Rédaction cité ci-dessus et sont mentionnés ci-après à la fin du troisième article. La Pologne joue un rôle considérable et dessiné depuis longtemps.

Après avoir parcouru ces pages, qu'il me soit permis de dire, non sans émotion, que j'ai été frappé d'y reconnaître une influence toujours grandissante s'attachant au nom de René Baire. L'article publié, dans *L'Enseignement mathématique* (31^{me} année, 1932), après sa fin si triste et si prématurée, lui rendait un amical hommage. Mais il apparaît, avec une clarté qui va s'accroissant, qu'au delà des considérations d'amitié, il y a aussi des considérations d'immense valeur scientifique qui contrastent de plus en plus

douloureusement avec la vie si pénible qu'eurent l'homme et le savant. Nous devons à nos amis polonais d'avoir élevé un nouveau monument sur une tombe française.

1. Stefan BANACH. *Théorie des Opérations linéaires* (VIII-254 pages, 1932. Prix: 3 dollars). — Ce livre contient les fondements de l'algèbre des opérations, fondements correspondant à l'étude des formes linéaires de l'algèbre ordinaire. Au point de vue historique, ces théories sont nées avec des analyses de plus en plus pénétrantes de la continuité bientôt remplacée par des concepts discontinus qui permettaient cependant de conserver des notions telles celles de l'intégrable et du mesurable. Les équations intégrales apparaissaient alors comme un monde situé au delà des équations différentielles, dans des espaces souvent réputés abstraits parce que les notions métriques n'y étaient pas admises sans discernement.

En fait, tout ceci bouillonne prodigieusement, depuis le début du siècle, sous des couleurs d'abstraction qui semblaient d'une peinture difficile et qui sont cependant celles que la Physique théorique a également imposées. L'aspect rébarbatif de la rigueur extrême a disparu dès que cette rigueur est devenue suffisamment générale et a pu prendre la physionomie qui lui convenait véritablement. Et même M. Stefan Banach invoque, dès la première page de sa Préface, la « valeur esthétique » du nouveau point de vue. C'est le thème si souvent défendu dans *L'Enseignement mathématique*.

On admet les théories de la mesure et de l'intégrale de Lebesgue. La condition de Baire sur l'ensemble parfait joue également un rôle fondamental. L'espace vectoriel naît des considérations linéaires les plus simples; les opérations qui peuvent s'y définir donnent immédiatement des fonctionnelles. Les divers espaces ont des types qui correspondent tout simplement à diverses définitions; il faut construire logiquement et se fier aussi peu que possible à l'intuition sensible. Quand l'espace fonctionnel *complet* peut être *normé*, il donne le type spatial (B) adéquat à la linéarisation et à ses conséquences limites. Il ne faut pas être un grand clerc pour réapercevoir les questions physiques qui ont conduit dans ces parages. Les suites biorthogonales accentuent la même impression. Plus loin nous voyons (p. 121) que les notions d'espaces vectoriels de fonctionnelles linéaires *régulièrement* fermés et de ceux *transfiniment* fermés sont équivalents. N'est-il pas sensationnel que le *transfini* s'adjoigne ainsi au *régulier*. De là à la convergence *faible*, aux espaces *faiblement* complets, il n'y a que les précautions indispensables pour de corrects passages à la limite. Ils resterait à insister sur les équations fonctionnelles elles-mêmes (Riesz, Fredholm, Volterra) sur l'isométrie, l'équivalence, l'isomorphie, l'analyse dimensionnelle, sur les auteurs cités depuis Cauchy et Riemann. Nous n'en finirions pas. Renvoyons au texte précieux et précis de M. Stefan Banach.

2. Stanislaw SAKS. *Théorie de l'Intégrale* (VIII-290 pages, 1933. Prix: 4 dollars). — Ce second volume est peut-être, au moins dans ses débuts, plus élémentaire que le précédent. Il expose les théories de la mesure, de l'intégrale de Lebesgue et même la théorie des ensembles dont quelques préliminaires seulement sont considérés comme classiquement connus. Cette exposition n'est pas faite sans vues rétrospectives. L'auteur cite Henri Poincaré, parlant de fonctions inventées tout exprès pour mettre des raisonnements en défaut, et Charles Hermite se détournant, avec effroi

et horreur, des fonctions continues sans dérivées. L'esprit moderne peut cependant triompher puisqu'il comprend, comme cas particulier, celui d'autrefois. L'abstraction analytique a même pu faire une très large place à l'intuition géométrique qui se trouve, elle aussi, grandement généralisée. Ainsi, un ensemble peut être *figure*; il est alors somme d'intervalles n'empiétant pas l'un sur l'autre. Ces intervalles ont des *aires* qui ont une somme. La fonction de figure élémentaire $F(R)$ et la fonction d'intervalle $F(I)$ suivent immédiatement. D'où une décomposition de Jordan qui a précédé celle de Lebesgue.

Le simple concept de mesure devait conduire à une intégration profondément remaniée et poussée, par exemple, vers la *totalisation* de Denjoy. L'intégrale de Lebesgue a une définition descriptive valable immédiatement pour l'intégrale multiple, avec des précisions constituant le théorème de Fubini précisé, à son tour, par un théorème de Tonelli. La même intégrale a une définition géométrique avec conservation étendue de la notion d'aire; elle généralise aussi l'intégrale de Riemann-Stieltjes. L'aire d'une surface courbe est une limite d'aires polyédrales mais non nécessairement inscrites dans la surface. Ensuite se place l'intégrale de Burkill avec subdivisions dont les *nombres caractéristiques* tendent vers zéro. Z. de Geöcze, toujours dans le calcul des aires gauches, passe par des constructions intégrales préliminaires qui n'assurent la limite entrevue qu'avec un théorème de Radò complété encore par Tonelli. L'intégrale de Perron repose sur considérations majorantes et minorantes *dans une figure*. Les idées de Denjoy, Lusin, Khintchine, avec les dérivées approximatives et relatives, suivent naturellement un théorème de Baire. Les théorèmes de Denjoy sont intimement unis aux *nombres dérivés*; ils conduisent à des opérations intégrales complètes que Hake, Alexandroff, Looman semblent avoir étendues encore. Et tout ceci reste cependant en liaison avec les intégrales de Cauchy et de Harnack. Passons sur les différentielles totales généralisées pour les fonctions de deux variables. Une Note de M. Stefan Banach, *Sur la mesure de Haar*, termine cette magistrale exposition qui doit tant à l'Ecole française fondamentalement représentée par le si regretté René Baire ainsi que par MM. Borel et Lebesgue. N'omettons pas de signaler une riche bibliographie.

3. Casimir KURATOWSKI. *Topologie*, I (x-286 pages, 1933. Prix: 4,50 dollars). — Ce volume vient bien en place après les deux précédents; il est d'une étude notablement plus difficile. Il traite des propriétés des ensembles de points invariants par rapport aux transformations bicontinues. Par exemple connaître de certaines transformations, qui changent certaines propriétés limites en propriétés analogues, est ici problème topologique. Ceci paraît distinct de la *Topology* de Solomon Lefschetz (voir *Ens. math.*, 30^{me} année, 1931, p. 153) à caractère algébrique et combinatoire; M. Lefschetz n'est même pas cité. Il y a là une différence sur laquelle il nous paraît utile d'attirer l'attention.

En revanche la topologie, selon M. Kuratowski, va du côté des algèbres logiques. Et cela se conçoit. Il ne manque point de propriétés d'ensemble, établies selon une certaine évidence ou une certaine logique, qui, soumises à de certaines transformations, donneront des propriétés transformées où l'on ne reconnaîtra pas aisément l'évidence ou la logique primitives. On se demandera alors si évidence ou logique n'ont pas, à leur tour, quelque chose de faillible ou d'incertain. Bref il faudra créer ici une analyse générale

pouvant, au besoin, disséquer la logique elle-même. Certes on peut se demander si cette analyse de dissection ne conduira pas à quelque chose de plus subtil encore et ainsi de suite indéfiniment, mais le présent livre, forcément limité, n'aboutit pas à cette dilution dans l'indéfini. Il s'inspire essentiellement des espaces plongés en d'autres qui sont peut-être de mieux en mieux définis à mesure qu'ils sont de moins en moins vulgaires. Les espaces abstraits, de M. Fréchet, sont grandement à l'honneur. C'est notamment à M. Fréchet que l'on doit la notion d'espace *complet*, notion construite à partir d'une condition de Cauchy et qui, par suite, n'a pas été créée par une nouvelle école qui serait seule à comprendre le langage qu'elle emploie. D'ailleurs l'espace complet généralise aussi l'espace métrique.

Il va devenir fastidieux de répéter encore qu'en France tous ces travaux semblent avoir été commencés par la trinité Baire-Borel-Lebesgue. C'est surtout René Baire qui semble avoir ici un rôle de toute premier plan, la *propriété de Baire* étant analogue, en Topologie, à la mesurabilité en Analyse et pouvant s'attacher à d'innombrables généralisations.

N'essayons pas d'analyser davantage; c'est impossible. Le livre condense d'immenses travaux. Parmi les auteurs le plus fréquemment cités, outre ceux déjà nommés, mentionnons Alexandroff, Banach, Cantor, Denjoy, Hausdorff, Lavrentieff, Lindelöf, Lusin, Mazurkiewicz, Menger, Nykodym, Saks, Sierpinski (auquel l'ouvrage est dédié), Urysohn, Young. Tous ont brillamment travaillé à perfectionner l'esprit de pénétration logique.

A. BUHL (Toulouse).

Vladimir BERNSTEIN. — **Leçons sur les Progrès récents de la Théorie des Séries de Dirichlet**, professées au Collège de France. Préface de M. Jacques Hadamard (Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions publiée sous la direction de M. Emile Borel). — Un volume gr. in-8° de XVI-320 pages. Prix: 60 francs. Gauthier-Villars & C^{ie}. Paris, 1933.

Les séries de Dirichlet sont grandement à l'honneur et sont destinées à y être bientôt davantage encore. Sans s'éloigner des ouvrages français qui nous touchent immédiatement, il faut évidemment mentionner le fascicule de M. Valiron publié dans le *Mémorial des Sciences mathématiques* et, après la présente œuvre, une autre, actuellement en préparation, qui sera rédigée par M. Hadamard lui-même. Le « petit livre » actuel, pour parler comme l'auteur, me fait déjà l'effet d'un grand ouvrage développant un Cours fait, au Collège de France, au printemps de 1931, sous les auspices de la Fondation Peccot. Cet ouvrage est écrit dans un style relativement élémentaire, très accessible aux néophytes simplement imbus de la Théorie des Fonctions selon Cauchy car l'intégration curviligne est, ici aussi, un instrument essentiel.

Rappelons qu'une série de Dirichlet est de la forme

$$f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s} .$$

On peut se donner, de manière complètement indépendante, la suite des a et la suite des λ , avec l'entier n variant de 1 à l'infini positif. Il est immédiatement visible que les séries entières et, par exemple, les séries trigonométriques sont comprises dans le type indiqué. Si les séries de Dirichlet sont issues, historiquement, de recherches arithmétiques, elles participent,