Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 32 (1933)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Buchbesprechung: J. Favard. — Leçons sur les Fonctions presque périodiques, professées au Collège de France. Préface de M. Gaston Julia (Cahiers scientifique publiés sous la direction de M. Gaston Julia: fasc. XIII). — Un volume gr. in-8° de VIII-184 pages. Pris: 50 francs. Gauthier-Yillars & Cie. Paris. 1933.

Autor: Buhl, A.

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

J. FAVARD. — **Leçons sur les Fonctions presque périodiques,** professées au Collège de France. Préface de M. Gaston Julia (Cahiers scientifiques publiés sous la direction de M. Gaston Julia: fasc. XIII). — Un volume gr. in-8° de VIII-184 pages. Pris: 50 francs. Gauthier-Villars & Cie. Paris, 1933.

Encore un excellent Cours fait sous les auspices de la Fondation Peccot et dont le sujet présente de très grandes analogies avec le précédent. Les fonctions presque périodiques sont comparables aux fonctions « troublées de la Mécanique céleste et même de la récente Mécanique ondulatoire: leur théorie correspond à des troubles particulièrement aisés à codifier. Ainsi, à une fonction presque périodique, correspond toujours une valeur moyenne, une série d'exposants de Fourier et une autre série de coefficients de Fourier telles que, d'après Hurwitz, on puisse écrire la correspondance

$$f(x) \sim \sum A_n e^{i\Lambda_n x} .$$

Le second membre rappelle immédiatement la série de Dirichlet avec cette différence qu'ici les choses sont manifestement préparées pour la comparaison avec les séries trigonométriques et les représentations périodiques tandis qu'avec M. Bernstein on visait plutôt à la comparaison avec les séries de Taylor. Mais les deux points de vue s'identifieront fatalement, et sous la plume de M. Favard lui-même, quand celui-ci, dans la seconde moitié de son ouvrage, en viendra aux fonctions *analytiques* presque périodiques.

A la formule ci-dessus correspond un théorème d'unicité absolument essentiel. A $f(x)$ ne correspond qu'un seul second membre. Seulement celui-ci n'approche pas toujours de $f(x)$ par quelque convergence élémentaire et directe; là encore, il faut imiter les procédés de sommation employés pour des séries divergentes correspondant à des tentatives de représentations périodiques. Signalons le rôle fort important des polynomes exponentiels. La construction de ces polynomes ne va pas sans développements sur des nombres de la forme $s_i \gamma_i$ (avec i indice de sommation). Les exposants Λ_n, de f, peuvent être de la forme $m_i \beta_i$, les m étant entiers, ce qui rend f quasi-périodique au sens de Bohl et de M. Esclangon. Il est impossible de mieux préciser sans développements mais enfin on peut retenir qu'il ne faut pas confondre la presque-périodicité avec la quasi-périodicité. Il se trouve que *presque* a pris un sens plus général que *quasi*.

Un autre point, des plus importants mais que nous ne pouvons que mentionner, est celui de la *normalisation* des fonctions presque-périodiques: c'est de là que provient surtout leur maniement pratique. Elles peuvent dès lors figurer comme coefficients dans des équations différentielles et même dans des systèmes d'équations différentielles tels les systèmes linéaires, systèmes auxquels on appliquera la méthode d'intégration par approximations successives de M. Emile Picard. La Théorie de la Lune exigeait déjà des considérations de ce genre avec l'équation $z'' + \Theta z = 0$ (Voir H. POINCARÉ. *Leçons de Mécanique céleste*, Tome II, Seconde partie, 1909, p. 43). Il fallut d'abord se tirer d'affaire par des procédés assez improvisés. Aujourd'hui la Théorie des fonctions presque périodiques apporte de véritables méthodes; il est naturel qu'elle ait provoqué les efforts d'un astronome comme M. Esclangon et, du côté de la Physique théorique, ceux d'un savant comme M. Weyl.

Les circonstances qui font paraître, à peu près ensemble, les ouvrages de MM. W. Bernstein et J. Favard, ne sont sans doute pas fortuites. Les deux livres sont à étudier ensemble pour qui voudra faire des comparaisons profondes et fructueuses. A. Buhl (Toulouse).

J. Ser. — **Les calculs formels des Séries de factorielles.** — Un volume gr. in-8° de VIII-100 pages. Prix: 20 francs. Gauthier-Villars & Cie. Paris, 1933.

Il s'agit ici du calcul analytique aboutissant à ce que l'on appelait autrefois la belle formule. On peut croire que ce calcul a perdu du terrain et cependant il est destiné à en regagner avec les actuels progrès du symbolisme. En parcourant l'ouvrage de M. Ser j'ai successivement pensé aux *facultés analytiques* de Laplace, aux formules, toujours incomplétement étudiées peut-être, de Burmann et de Wronski, aux recherches beaucoup plus récentes de M. Nörlund sur la « somme » d'une fonction (*Mémorial des Sc. math.*, fasc. 24) et enfin à tout l'arsenal hermitien qui revient au grand jour grâce aux quanta.

L'auteur part de la Série de Newton, pose

$$n\,!\,X_n = x\,(1 - x)\,\ldots\,(n - 1 - x)$$

et, à propos de fonctions élémentaires diverses mais de plus en plus complexes, nous fait admirer la puissance constructive de ces X_n. Ceux-ci se prêtent notamment à de certains développements directs et à d'autres dits *réciproques*. Parmi des nombres *autoréciproques* on retrouve ceux de Bernoulli rattachés à des développements en série entière et qui pourraient être rattachés aussi aux séries de puissances symboliques de la Théorie des groupes.

Un chapitre consacré aux formules sommatoires contient beaucoup de choses qui pourraient être tirées de la Théorie des résidus. Ici, on songe aux recherches de M. Lindelöf.

Si les sommes ordinaires correspondent à une opération Ωf, il y a des sommes alternées qui correspondent à $\Omega \cos \pi x\, f(x)$. On retrouve ici la fonction Γ et sa dérivée, des généralisations de la formule de Wallis et l'on aboutit ensuite à la notion de *faculté* que l'on sentait venir depuis longtemps. Il faut également signaler les séries de constantes dans lesquelles la constante d'Euler entre de manière très particulière.

Les fonctions eulériennes et le logarithme intégral donnent un chapitre particulièrement esthétique. Le rapprochement des séries de facultés et des séries de Newton conduit à de faciles aperçus sur l'extrapolation. Chemin faisant, nombre de séries divergentes ont été ingénieusement transformées de manière à rétablir la convergence.

Certes, je n'ai pas vérifié tous les calculs de M. Ser mais tous incitent à l'attention; on peut penser que nombre d'abstractions de la Théorie des fonctions pourraient trouver, dans ces pages, d'élégantes illustrations.

A. Buhl (Toulouse).