

Translation quelconque d'un cercle.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1933)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

TRANSLATION QUELCONQUE D'UN CERCLE.

On peut reproduire pour ce cas des généralités analogues à celles du cas précédent. On verrait de même qu'on peut choisir arbitrairement la courbe engendrée, le cercle générateur et la courbe de base, lieu de l'origine A, le choix de cette dernière courbe déterminant la courbe de translation d'après la propriété du rayon origine. On obtiendrait ainsi un triangle curviligne pour lequel l'évaluation de l'aire se ramènerait à un moment d'arc du cercle générateur convenablement pondéré.

Particularisons tout de suite le problème en faisant les hypothèses suivantes :

$$m = \text{Cte};$$

L'angle constant du rayon origine avec la translation est droit;

Le cercle générateur est entièrement parcouru;

Les conventions de signes sont celles précédemment adoptées.

L'origine A coïncide alors avec un des points de contact du cercle avec son enveloppe. L'aire de la boucle est

$$2\pi mr \times r + \pi r^2 = (2m + 1)\pi r^2 .$$

On peut par suite énoncer la propriété suivante :

III. — *Si on considère un cercle de rayon constant se déplaçant dans son plan en restant tangent à une courbe de base B et un point mobile parcourant le cercle dans un sens déterminé de façon que les arcs décrits à partir du point de contact soient proportionnels aux arcs décrits par le centre, la courbe engendrée forme une série de boucles qui déterminent avec la courbe de base des aires équivalentes et égales à :*

$$(2m + 1)\pi r^2 ,$$

m désignant le rapport constant entre le déplacement du centre et celui du point sur le cercle.

Application aux épicycloïdes. — La courbe de base est un cercle de rayon R , les déplacements du centre et du point de contact sont dans un rapport constant $\frac{R+r}{R}$.

L'aire d'une boucle est donnée par

$$A = (2m + 1) \pi r^2 ,$$

avec

$$m = 1 \quad \text{pour la cycloïde ordinaire (base rectiligne)}$$

$$m = 1 + \frac{r}{R} \quad \text{pour l'épicycloïde}$$

$$m = 1 - \frac{r}{R} \quad \text{pour l'hypocycloïde}$$

et par

$$A = (2m + 1) \pi a^2$$

avec

$$m = \frac{r}{a} \left(1 + \frac{r}{R} \right)$$

pour l'épicycloïde raccourcie ou allongée, a désignant la distance du point générateur au centre de la roulette.

On voit aisément que, dans les cycloïdes allongées ou raccourcies, à des valeurs égales et de signe contraire de m correspondent les mêmes courbes rapportées à des bases différentes. L'aire des cycloïdes allongées est égale en valeur absolue à la différence des deux aires formées par la boucle.

Pour la cycloïde allongée décrite par un point situé à une distance égale au diamètre ces deux aires sont égales comme on le voit en faisant $m = \frac{-1}{2}$.

Généralisation. — La méthode exposée consiste à intégrer des éléments d'aire $d^2 A = d\sigma dy$ le long de la courbe S puis dans son mouvement de translation. Elle reste applicable au cas où ces éléments sont multipliés par un coefficient fonction de l'ordonnée y . En appelant $f(y)$ cette fonction et $F(y)$ sa primitive on aura :

$$\int \int f(y) d^2 A = \int F(y) m ds . \quad (1)$$

L'expression trouvée dépend en général du système d'axes mobiles xoy . On se bornera donc à la translation rectiligne. Supposons de plus m constant et $f(y)$ d'une forme susceptible d'interprétation géométrique, soit :

$$f(y) = y^\alpha .$$

Pour $\alpha = 0$ le premier membre de (1) représente une aire,

Pour $\alpha = 1$ le premier membre de (1) représente un moment statique,

Pour $\alpha = 2$ le premier membre de (1) représente un moment d'inertie,

les moments étant pris par rapport à ox . En désignant par $\mathcal{M}_\alpha(X)$ le moment d'ordre α par rapport à ox , de l'élément géométrique X , (1) s'écrira

$$\mathcal{M}_\alpha(A) = \frac{m}{\alpha + 1} \mathcal{M}_{\alpha+1}(S) . \quad (2)$$

Le calcul d'un moment de l'aire A se ramène à celui d'un moment d'ordre supérieur de la courbe S . Faisant $\alpha = 0$ dans (2) on a la relation précédemment trouvée :

$$A = mSy = Ly . \quad (3)$$

Faisant le quotient membre à membre de (2) par (3), en prenant, dans (2), $\alpha = 1$

$$y_A = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathcal{M}_2(S)}{Sy} = \frac{\rho^2}{2y} = \frac{1}{2} \left(y + \frac{r^2}{y} \right) \quad (4)$$

y_A désignant l'ordonnée du centre de gravité de l'aire balayée A ;
 ρ le rayon de giration de l'arc générateur par rapport à ox ;
 r le rayon de giration par rapport à la parallèle à ox passant par le centre de gravité de l'arc, d'ordonnée y .

Se plaçant dans les conditions de la propriété (I) on peut compléter cette propriété par la suivante :

(I)'. — *L'ordonnée du centre de gravité de l'aire curviligne balayée est égale à la moitié de celle de l'antipôle de la base rectiligne par rapport à l'ellipse d'inertie de l'arc générateur.*

Application à la cycloïde ordinaire. — En considérant le cercle entier de rayon R :

$$m = 1, \quad A = 2\pi R^2, \quad C = \pi R^2, \quad S = 2\pi R,$$

$$y = R, \quad r^2 = \frac{R^2}{2},$$

$$y_A = \frac{1}{2} \left(R + \frac{R^2}{2R} \right) = \frac{3}{4} R.$$

L'ordonnée du centre de gravité de l'aire totale de la boucle de cycloïde sera donnée par l'équation des moments statiques :

$$2Cy_A + CR = 3Cy$$

d'où =

$$y = \frac{1}{3} \left[2 \times \frac{3}{4} + 1 \right] R = \frac{5}{6} R.$$

SUR LA DIVISION D'UNE SPHÈRE EN TROIS ENSEMBLES

PAR

Julius WOLFF (Utrecht) et Armand DENJOY (Paris).

M. KAROL BORSUK a démontré le théorème suivant :

*Si une sphère à n dimensions est partagée en n ensembles de points, alors au moins UN de ces n ensembles a pour diamètre le diamètre de la sphère*¹.

Nous allons donner une démonstration simple pour le cas $n = 3$.

¹ *Internationaler Mathematiker-Kongress, Zürich, 1932. Sektionsvorträge, Band II, page 192.*