Application à la cycloïde ordinaire. — En considérant le cercle entier de rayon R:

$$m = 1 , \quad A = 2\pi R^2 , \quad C = \pi R^2 , \quad S = 2\pi R ,$$

$$y = R , \quad r^2 = \frac{R^2}{2} ,$$

$$y_A = \frac{1}{2}\left(R + \frac{R^2}{2R}\right) = \frac{3}{4} R .$$

L'ordonnée du centre de gravité de l'aire totale de la boucle de cycloïde sera donnée par l'équation des moments statiques:

$$2Cy_A + CR = 3Cy$$

d'où =

$$y = \frac{1}{3}\left[2 \times \frac{3}{4} + 1\right] R = \frac{5}{6} R .$$

SUR LA DIVISION D'UNE SPHÈRE EN TROIS ENSEMBLES

PAR

Julius Wolff (Utrecht) et Armand Denjoy (Paris).

M. Karol Borsuk a démontré le théorème suivant:

Si une sphère à n *dimensions est partagée en* n *ensembles de points, alors au moins* UN *de ces* n *ensembles a pour diamètre le diamètre de la sphère* [1].

Nous allons donner une démonstration simple pour le cas $n = 3$.

---

[1] *Internationaler Mathematiker-Kongress*, Zürich, 1932. Sektionsvorträge, Band II, page 192.

1. — Démontrons d'abord le théorème plus simple suivant: supposons qu'on partage la surface S d'une sphère en un nombre fini de domaines, coloriés en rouge, blanc et bleu, tel que l'ensemble des frontières se compose d'un nombre fini de courbes γ fermées simples de Jordan. Convenons de plus qu'un point de la frontière de deux ou trois couleurs porte ces deux ou trois couleurs. Alors S contient deux antipodes de même couleur.

En effet, admettons pour un instant que l'assertion soit en faute. Au moins une des courbes fermées γ délimite un domaine Δ simplement connexe et à une seule couleur, disons blanche. Soit P un point de γ, alors P est blanc et possède encore une autre couleur, disons rouge. Je dis que tout point de γ est blanc et rouge. Car dans le cas contraire γ posséderait un point limite de points blancs, de points rouges et de points bleus. Ce point serait blanc, rouge et bleu et aurait donc même couleur que son antipode. Construisons les antipodes des points de Δ. Ils forment un domaine Δ', limité par la courbe γ', antipode de γ. Or γ', dont la courbe antipodaire est blanche et rouge, doit être bleue et intérieure à une bande bleue. Remarquons en outre que Δ et Δ' n'ont pas de point commun, car autrement S contiendrait deux antipodes blancs. Colorions Δ en rouge, Δ' en bleu. La frontière γ disparaît et aucune frontière nouvelle n'apparaît. Comme dans la première division, S ne contient pas deux antipodes de même couleur dans la nouvelle division. Continuons ce procédé. Le nombre des courbes γ diminuant toujours, nous aboutissons à une division de S en deux couleurs par une seule coube γ. Or, l'antipode de γ aurait la troisième couleur. Cette contradiction démontre le théorème.

2. — Passons au théorème général. Soit S divisée en trois ensembles E_1, E_2, E_3, rouge, blanc et bleu. Soit ε un nombre positif. Divisons S par un système de grands cercles en un nombre fini de domaines δ_k dont les diamètres sont tous plus petits que ε. Dans chaque δ_k choisissons un point P_k et attribuons à δ_k la couleur de P_k. Le coloriage résultant de S satisfait aux conditions du théorème précédent. On en conclut qu'au moins UN des trois ensembles E_1, E_2, E_3 a pour diamètre une quantité plus grande que $2R - 2\varepsilon$, R étant le rayon de S. Par consé-

quent, ε étant arbitraire, au moins UN de ces trois ensembles a le diamètre $2R$.

Remarque. En réalité nous avons démontré par le raisonnement précédent le théorème plus général suivant:

Soit S *une surface simple de Jordan, sur laquelle on a donné une correspondance biunivoque et continue. Si l'on partage* S *en trois ensembles* E_1, E_2, E_3 *alors au moins* UN *de ces ensembles contient une suite* P_n, P_n' *de paires de points, tels que* P_n *et* P_n' *tendent vers une paire de points conjugués dans la correspondance donnée.*

SUR L'ÉQUATION $x^3 + y^3 = z^3$

PAR

F. J. Duarte (Genève).

Le but de cette Note est de compléter un travail[1] que nous avons publié récemment: *Sur les solutions irrationnelles et complexes de l'équation* $x^n + y^n = z^n$, dans lequel nous avons donné les formules suivantes pour le cas de $n = 3$:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{2\theta + s + \sqrt{\Delta}}{2}\,, \\ y &= \frac{2\theta + s - \sqrt{\Delta}}{2}\,, \\ z &= \theta + s\,, \end{aligned}\right. \tag{1}$$

où l'on a posé pour abréger $\Delta = s^2 - \dfrac{4\theta^3}{3(2\theta + s)}$.

On donnera aux paramètres θ et s des valeurs rationnelles quelconques; on peut toujours, en multipliant ou divisant les

---

[1] Imprimerie A. Kundig, Genève, 1933.