Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 32 (1933)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA TRANSFORMATION $w = \frac{1}{\sqrt{Az^2 + Bz + C}}$

Kapitel: II. — La surface de Riemann pour $w = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}}$

Autor: Michel, W.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-25333

donc nous borner à étudier la formule (2), qui est plus simple à traiter que la formule (1).

II. — La surface de Riemann pour $w = \dfrac{1}{\sqrt{z^2-1}}$.

w ne prend qu'une seule valeur aux points $z_1 = +1$, $z_2 = -1$, $z_3 = \infty$ et à ces points correspondent respectivement les points $w_1 = w_2 = \infty$, $w_3 = 0$ dans le plan des w. Pour tout autre point du plan des z, w prend deux valeurs, égales en valeur absolue, mais de signes contraires.

Considérons le plan des z comme étant constitué par deux plans infiniment rapprochés l'un de l'autre. En deux points opposés, la fonction w prendra deux valeurs ne différant que par le signe. Aux points z_1, z_2, z_3, les deux valeurs de la fonction sont égales. Ce sont donc des points de ramification de la fonction. Reste à savoir si le plan des w est lui aussi composé de deux surfaces.

Formons la fonction inverse

$$z = \frac{\sqrt{w^2+1}}{w} = \frac{\sqrt{(w+i)(w-i)}}{w}. \qquad (3)$$

Nous en déduisons immédiatement que le plan des w est aussi double. Ainsi le double plan des z est transformé par la fonction (2) en plan double des w. La transformation est conforme en chaque point où l'on a

$$\frac{dw}{dz} = \frac{-z}{\sqrt{(z^2-1)^3}} \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \neq \infty\ ; \qquad (4)$$

on a

$$\frac{dw}{dz} = 0 \quad \text{pour} \quad z_3 = \infty\ , \quad z_4 = 0\ ,$$

$$\frac{dw}{dz} = \infty \quad \text{pour} \quad z_1 = +1\ , \quad z_2 = -1\ .$$

Les deux surfaces de Riemann sont donc transformées de façon conforme l'une dans l'autre à l'exception des cinq couples de points

$$\begin{array}{lllll} z_1 = +1\ , & z_2 = -1\ , & z_3 = \infty\ , & z_4 = 0\ , & z_5 = 0\ , \\ w_1 = \infty\ . & w_2 = \infty\ . & w_3 = 0\ . & w_4 = +i\ . & w_5 = -i\ . \end{array}$$

Relions les points $z = -1,\ 0,\ +1,\ \infty$ par une courbe. Choisissons à cet effet l'axe réel et coupons le double plan des z suivant cet axe de -1 à ∞ en passant par 0 et $+1$.

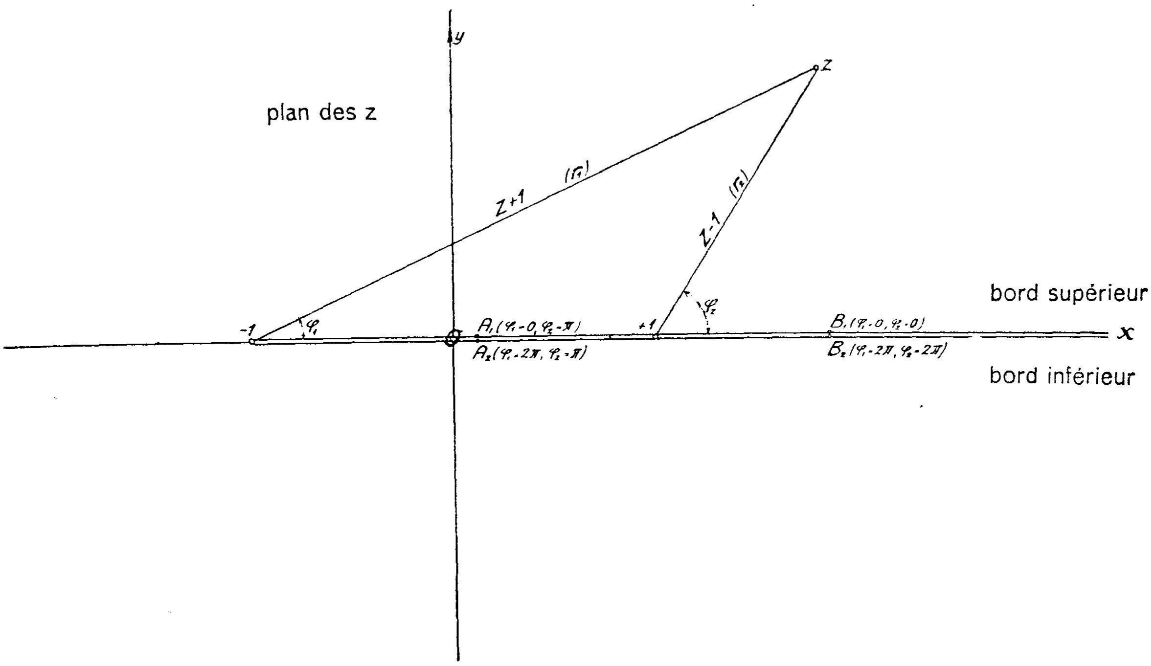

Fig. 1.

Déterminons ensuite les valeurs de la fonction, en deux points opposés et infiniment voisins de la coupure, dans l'un des deux plans. Dans la suite, nous ferons usage des expressions suivantes (fig. 1):

$$z = x + yi = re^{\varphi i} \quad (5) \qquad z + 1 = r_1 e^{\varphi_1 i} \quad (6) \qquad z - 1 = r_2 e^{\varphi_2 i} \quad (7)$$

$$w = u + vi = \mathrm{R}e^{\Phi i} = (r_1 r_2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} i} . \tag{8}$$

On a donc

$$\mathrm{R} = (r_1 r_2)^{-\frac{1}{2}} ; \qquad \Phi = -\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} . \tag{9}$$

Considérons d'abord la fonction (2) dans l'un des deux plans des z que nous appellerons le plan I. Limitons les angles aux intervalles suivants:

$$\text{Plan I:} \quad 0 \leqq \varphi_1 < 2\pi ; \qquad 0 \leqq \varphi_2 < 2\pi .$$

Afin que la variable z puisse passer du plan I au plan II de manière continue, les angles φ_1, φ_2 seront encore limités de la manière suivante:

$$\text{Plan II:} \quad 2\pi \leqq \varphi_1 < 4\pi \ ; \qquad 0 \leqq \varphi_2 < 2\pi \ .$$

Soit A_1 un point du plan I, situé entre -1 et $+1$ sur le bord supérieur de la coupure, et A_2 son opposé sur le bord inférieur (fig. 1).

Pour tous les points du bord supérieur situés dans l'intervalle $-1 < z < +1$, nous avons

$$\varphi_1 = 0 \ , \qquad \varphi_2 = \pi \ ; \qquad \Phi_1 = -\frac{\pi}{2} \ .$$

Soit d'autre part au point A_1

$$r_1 = \rho_1 \ , \qquad r_2 = \rho_2 \ , \qquad R_1 = (\rho_1 \cdot \rho_2)^{-\frac{1}{2}} \ .$$

Nous avons alors

$$w_1 = R_1 e^{\Phi_1 i} = -R_1 i \ . \qquad (a)$$

Pour tous les points du bord inférieur situés dans l'intervalle $-1 < z < +1$, nous avons

$$\varphi_1 = 2\pi \ , \qquad \varphi_2 = \pi \ ; \qquad \Phi_2 = -\frac{3\pi}{2} \ .$$

Au point A_2 nous avons $R_2 = R_1$. Dès lors

$$w_2 = R_1 e^{\Phi_2 i} = +R_1 i \ . \qquad (b)$$

De (a) et (b) nous tirons la relation $w_2 = -w_1$.

Donc dans l'intervalle de -1 à $+1$, deux points opposés l'un à l'autre sur la coupure, prennent des valeurs ne différant que par le signe.

Soit d'autre part un point B_1, situé entre $+1$ et l'infini, sur le bord supérieur de la coupure du plan I, et B_2 son opposé sur le bord inférieur. Pour tous les points du bord supérieur situés à la droite de $+1$ nous avons

$$\varphi_1 = 0 \ ; \qquad \varphi_2 = 0 \ ; \qquad \Phi = 0 \ .$$

Posons en B_1

$$r_1 = \rho_3 \ , \qquad r_2 = \rho_4 \ , \qquad R_3 = (\rho_3 \cdot \rho_4)^{-\frac{1}{2}} \ .$$

Nous avons alors

$$w_3 = R_3 \ . \qquad (c)$$

En tout point du bord inférieur, à la droite de $+1$, nous avons

$$\varphi_1 = 2\pi \ ; \qquad \varphi_2 = 2\pi \ ; \qquad \Phi = -2\pi \ ,$$

et en B_2 nous avons comme en B_1

$$r_1 = \rho_3 \ , \qquad r_2 = \rho_4 \ , \qquad R = R_3$$

et par suite

$$w_4 = R_3 \ , \qquad (d)$$

d'où l'on tire

$$w_4 = w_3 \ .$$

A droite de $+1$, deux points opposés l'un à l'autre sur la coupure, prennent donc la même valeur. Les mêmes propriétés apparaissent dans le plan II. Nous pouvons, à la droite de $+1$, réunir de nouveau les deux bords de la coupure dans les deux plans, et il ne subsistera que la coupure de -1 à $+1$. Pour que la variable z puisse passer de manière continue du plan I au plan II, nous fixons de -1 à $+1$ le bord supérieur de la coupure du plan I au bord inférieur de la coupure du plan II, en réunissant également entre eux les deux autres bords. Les deux plans sont encore liés au point $z = \infty$. Le double plan des z de Riemann est ainsi construit, et nous allons voir ce que sera son image, dans le plan des $\bar{w}$, qui est aussi un double plan de Riemann. Nous nous occuperons d'abord de l'image, dans le plan des w, du plan I des z, bordé par le point de ramification $z = \infty$ et la coupure de -1 à $+1$.

Image dans le plan des w *du bord de la coupure du plan I des* z.

Parcourons le bord de la coupure dans le sens positif. Nous passons de l'origine à -1 par le bord supérieur, de -1 à $+1$ par le bord inférieur, et nous retournons de $+1$ à l'origine, par le bord supérieur (fig. 2). L'ensemble des points du plan I, ainsi que le point isolé $z = \infty$, se trouvent à la droite de cette courbe fermée. L'image dans le plan des w, de cette courbe fermée du plan des z, est aussi une courbe fermée, et les images des points du plan des z, ainsi que l'image $w = 0$ du point

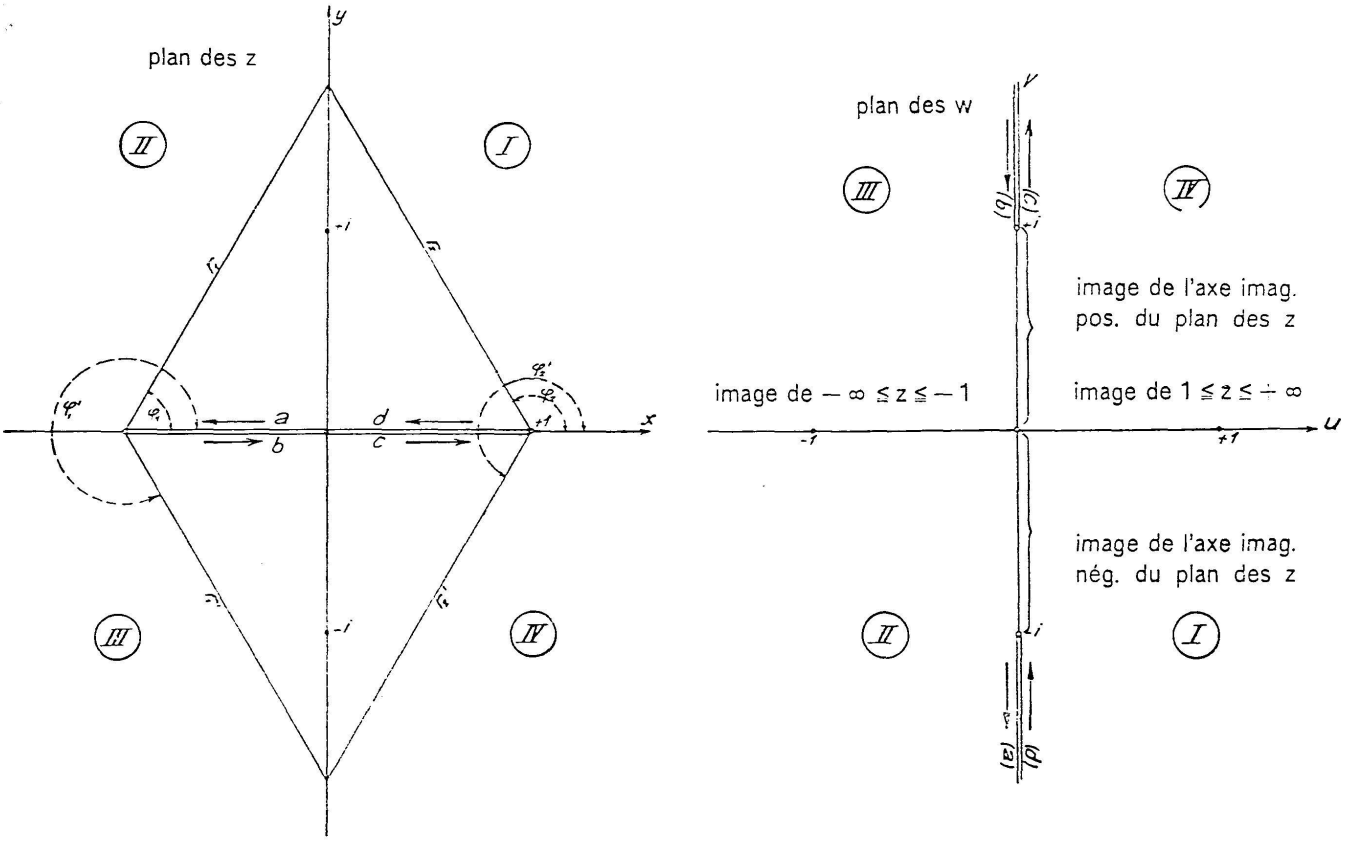

Fig. 2.

isolé $z = \infty$, sont aussi situées à la droite de l'image de la courbe, et forment un domaine doublement connexe, comme les points du plan des z.

a) *Image du segment de* 0 *à* —1 *du bord supérieur.*

Nous avons sur tout le segment

$$\varphi_1 = 0 \,, \qquad \varphi_2 = \pi \qquad \text{donc} \qquad \Phi = -\frac{\pi}{2} \,.$$

Pour $z = 0$ on a $R = 1$, pour $z = -1$ on a $R = \infty$. On a donc $w = -Ri$ avec $1 \leqq R \leqq \infty$.

b) *Image du segment de* —1 *à* 0 *du bord inférieur.*

Nous avons sur tout le segment

$$\varphi_1 = 2\pi \,, \qquad \varphi_2 = \pi \qquad \text{donc} \qquad \Phi = -\frac{3\pi}{2} \,.$$

On a $w = + \mathrm{R}i$ avec $\infty \geqq \mathrm{R} \geqq 1$.

c) *Image du segment de* 0 *à* +1 *du bord inférieur.*

Nous avons comme en *b*)

$$\varphi_1 = 2\pi \,, \qquad \varphi_2 = \pi \,, \qquad \Phi = -\frac{3\pi}{2} \,;$$
$$w = + \mathrm{R}i \qquad \text{avec} \qquad 1 \leqq \mathrm{R} \leqq \infty \,.$$

d) *Image du segment de* 1 *à* 0 *du bord supérieur.*

Nous avons comme en *a*)

$$\varphi_1 = 0 \,, \qquad \varphi_2 = \pi \,, \qquad \Phi = -\frac{\pi}{2} \,,$$
$$w = - \mathrm{R}i \qquad \text{avec} \qquad \infty \geqq \mathrm{R} \geqq 1 \,.$$

Si on relie les quatre segments dans le plan des z, ainsi que leurs quatre images dans le plan des w, on voit que la coupure de —1 à +1 du plan des z, a pour image dans le plan des w, une coupure $-i$, ∞, $+i$ suivant l'axe imaginaire. Au bord supérieur du plan des z correspond la coupure suivant l'axe imaginaire négatif de $-i$ à $-\infty\, i$, et au bord inférieur du plan des z correspond la coupure suivant l'axe imaginaire positif de $+i$ à $+\infty\, i$. La direction à prendre en parcourant la coupure dans le plan des w est indiquée par les flèches (fig. 2). Le domaine limité par la coupure $-i$, ∞, $+i$ et par le point isolé O est le plan des w tout entier.

Le plan I des z, limité par la coupure —1, +1 et le point isolé $z = \infty$, est transformé de manière univoque et conforme en un plan I des w, limité par la coupure $-i$, ∞, $+i$ et le point isolé $w = 0$. Le plan II des z est transformé de la même manière en un plan II des w.

Si nous relions le bord supérieur de la coupure du plan I des z au bord inférieur de la coupure du plan II, en réunissant également entre eux les deux autres bords, nous devons procéder à la même opération avec les bords droits et gauches des deux plans des w. D'autre part, les deux plans sont encore liés respectivement aux points $z = \infty$, $w = 0$. Le double plan des w de Riemann est ainsi déterminé.

Dans la suite nous étudierons notre transformation dans ses détails, et nous considérerons exclusivement la partie I, dans chaque plan.

Image dans le plan des w *de l'axe imaginaire du plan des* z.

En chaque point de l'axe imaginaire positif nous avons

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \pi \, , \qquad \Phi = -\frac{\pi}{2} \, ,$$

$$r_1 = r_2 \qquad 1 \leqq r_1 = r_2 \leqq \infty \, , \qquad \text{(Fig. 2)}$$

Alors $R = \frac{1}{r_1}$ décroit de façon monotone de 1 à 0 et on a $w = -Ri$.

En chaque point de l'axe imaginaire négatif nous avons

$$\varphi_1' + \varphi_2' = 3\pi \, , \qquad \Phi' = -\frac{3\pi}{2} \, ,$$

$$r_1' = r_2' \, , \qquad R' = \frac{1}{r_1'} \, , \qquad 1 \geqq R' \geqq 0 \, .$$

On a $w = R'i$.

L'axe complet des nombres imaginaires du plan des z a donc pour image le segment compris entre les deux points de ramification $-i$ et $+i$ de l'axe imaginaire du plan des w.

Image de l'axe réel du plan des z *de* 1 *à* ∞ *et de* -1 *à* $-\infty$.

D'après la figure 2 nous avons pour chaque point de l'axe réel du plan des z situé à la droite de $+1$

$$\varphi_1 = 0 \, , \qquad \varphi_2 = 0 \, , \qquad \Phi = 0 \, ;$$

$$w = R \qquad \text{avec} \qquad \infty \geqq R \geqq 0 \, .$$

Pour chaque point de l'axe réel négatif du plan des z, situé à la gauche de -1, nous avons

$$\varphi_1 = \pi \,, \qquad \varphi_2 = \pi \,, \qquad \Phi = -\pi \,;$$

$$w = -R \quad \text{avec} \quad \infty \geq R \geqq 0 \,.$$

Le segment de l'axe réel du plan des z, allant de $+1$ à -1 en passant par l'infini, a pour image l'axe réel complet du plan des w (fig. 2).

Image des quadrants du plan des z *dans le plan des* w.

Déterminons d'abord l'image du 1er quadrant du plan des z. Un point z se déplace sur le bord supérieur de la coupure de 0 à $+1$, puis sur l'axe réel de $+1$ à $+\infty$, et revient de l'infini par l'axe imaginaire positif, au point O sur le bord supérieur de la coupure (fig. 2). Le point z a parcouru une courbe fermée qui renferme, à sa gauche, le 1er quadrant du plan des z. Il suffit de parcourir l'image de cette courbe, qui doit être également une courbe fermée, et l'image du 1er quadrant du plan des z se trouvera à la gauche du chemin parcouru. D'après ce qui précède, l'image du bord supérieur du plan des z de 0 à 1 a pour image dans le plan des w le bord droit de la coupure de $-i$ à $-\infty\, i$. L'image du segment de l'axe réel du plan des z, compris entre $+1$ et $+\infty$, est l'axe réel positif du plan des w. Quand le point z revient au point O du bord supérieur par l'axe imaginaire positif, son image part de l'origine du plan des w, pour revenir au point de départ $-i$, et de cette façon, décrit une courbe fermée. Le domaine situé à la gauche de cette courbe est le 4me quadrant du plan des w. Ainsi l'image du 1er quadrant du plan des z est le 4me quadrant du plan des w et réciproquement, d'après le principe de Schwarz, l'image du 4me quadrant du plan des z est le 1er quadrant du plan des w.

D'une manière analogue on a: l'image du 2me quadrant du plan des z est le 3me quadrant du plan des w; l'image du 3me quadrant du plan des z est le 2me quadrant du plan des w.