**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Band:** 32 (1933)

**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Buchbesprechung:** Edmund Landau. — Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung.— Un vol. in-8° de 368 pages; broché RM. 20; relié, RM. 22.50; P. Noordhoff, Groningen, 1934.

**Autor:** Mirimanoff, D.

Justement parce que l'aspect général est élégant et a été élaboré par un bon professeur, ceux qui savent pourront ici trouver matière à des travaux qui se placeraient bien au-dessus de la trigonométrie classique. Ainsi nombre d'identités trigonométriques sont des relations fonctionnelles dont la trigonométrie ne donne que des solutions particulières. Et si l'on voulait en déterminer la solution la plus générale ? J'imagine que, tout au moins dans certains cas, cela pourrait conduire loin. Page 12, je trouve l'identité à vérifier

$$\text{cotang}^2 x \cos^2 x = \text{cotang}^2 x - \cos^2 x \,. \tag{1}$$

C'est immédiat. N'est-il pas indiqué, après cela, de rechercher toutes les fonctions, $u$ et $v$, telles que

$$u^2 v^2 = u^2 - v^2 \,. \tag{2}$$

C'est encore fort simple mais ce sont les extensions de ce genre qui pourraient conduire à nombre de développements inattendus. Et j'imagine encore qu'il y a d'excellents mathématiciens qui pourraient rencontrer l'équation (2) et n'apercevoir la solution particulière (1) qu'après quelques détours.

Si l'on voulait paraître un peu plus savant, on citerait l'équation fonctionnelle

$$F(x) F(1 - x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

qui admet la solution trigonométrique

$$F = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cos\acute{e}c} \frac{\pi x}{2}$$

et la solution transcendante $F = \Gamma(x)$. Nous voilà loin des *Exercices* de M. Caronnet mais je ne crois pas que leur auteur puisse m'en vouloir pour ces digressions inspirées par son équation (1) et conformes à l'esprit kleinéen qui recommande de voir de haut les mathématiques élémentaires. Encore une fois, je n'écris pas cet article pour les élèves mais plutôt pour leurs maîtres. Je prétends que ces derniers pourront trouver, dans ce joli recueil de problèmes, des sujets de réflexion aussi intéressants que divers.

A. Buhl (Toulouse).

Edmund Landau. — **Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung.**— Un vol. in-8° de 368 pages; broché RM. 20; relié, RM. 22.50; P. Noordhoff, Groningen, 1934.

Dans cette « Introduction au Calcul différentiel et intégral » M. Landau a reproduit la substance du cours d'analyse, remanié à nouveau, qu'il professe régulièrement depuis plus de trente ans, à côté d'autres cours déjà résumés en partie dans des ouvrages devenus classiques et dont l'éloge n'est plus à faire.

Le nouveau livre de M. Landau s'adresse à des débutants, aussi l'auteur a-t-il eu soin de n'établir que des propositions qui constituent la base du calcul infinitésimal et, en les groupant de la manière la plus naturelle et didactiquement la plus simple, de mettre en évidence les définitions et les propriétés qui servent de « ciment » et que parfois on passe sous silence. C'est le souci constant de tout justifier, de ne sauter aucun raisonnement, si insignifiant soit-il, qui explique la quantité énorme de définitions et de théorèmes soigneusement numérotés: le volume en contient plusieurs centaines. Mais a-t-on jamais compté le nombre des théorèmes établis ou simplement énoncés dans les traités classiques ?

Le livre de M. Landau contient deux parties de longueur inégale: les principes et les règles du calcul différentiel font l'objet de la première; dans la seconde, beaucoup plus courte, l'auteur expose les éléments du calcul intégral. Les applications à la géométrie sont laissées de côté, bien que M. Landau les traite longuement dans ses cours, mais en écrivant ce livre il tenait surtout à faire connaître la manière dont il a l'habitude d'exposer les principes du calcul infinitésimal, manière qui, en effet, s'écarte sensiblement de celle à laquelle nous sommes habitués en France et en Suisse.

Dans l'introduction il rappelle, en les précisant, les premières règles du calcul dans le domaine réel et quelques notions, par exemple celle de coupure, que l'étudiant est censé connaître. Mais le lecteur qui s'intéresse aux fondements de l'analyse fera bien de consulter le petit livre de M. Landau « Grundlagen der Analysis » publié en 1930, qu'on peut considérer comme une introduction à cet ouvrage.

Je ne saurais analyser en détail les trente et un chapitres du livre. Voici les sujets principaux traités dans la première partie: suites convergentes, notion de fonction, en particulier celle de fonction continue, notion de dérivée, le théorème de la moyenne, séries infinies, fonctions circulaires, fonctions de deux variables, fonction implicite, etc.; et dans la seconde: notion d'intégrale indéfinie, règles fondamentales, notion d'intégrale définie, intégration de séries, la fonction gamma et les séries de Fourier. Ce qui caractérise du reste l'exposé de M. Landau, c'est surtout la manière dont ces sujets sont traités, en particulier la manière dont il définit les notions fondamentales et certaines fonctions élémentaires. La fonction $\log x$, par exemple, est définie comme limite du produit de deux facteurs $k = 2^n$ et $\sqrt[k]{x} - 1$, lorsque le nombre entier $n$ augmente indéfiniment, le nombre $e$ est le nombre dont le logarithme ainsi défini est égal à l'unité; ce n'est que beaucoup plus loin, dans le chapitre 15, que nous retrouvons l'expression classique de $e$; les fonctions circulaires $\cos x$ et $\sin x$ sont définies à l'aide de séries entières et le nombre $\pi$ est, par définition, le double du plus petit zéro positif de $\cos x$, point de vue qu'on adopte rarement dans les éléments, mais qui a des avantages (cf. par exemple l'*Introduction à la théorie des fonctions*, de Jules Tannery). On évite ainsi de faire appel à l'intuition géométrique et l'analyse est arithmétisée au sens de Weierstrass. Le livre ne contient aucune figure, ce qui n'empêchera pas l'étudiant d'en construire quelques-unes lui-même; il en reconnaîtra l'utilité, tout en sachant qu'on peut s'en passer.

Un rôle de premier plan est joué par des exemples habilement choisis, qui tantôt précèdent la définition d'une notion nouvelle ou l'énoncé d'un théorème et tantôt les expliquent et les interprètent. C'est ainsi que la définition de la notion de continuité est donnée à la page 54, mais déjà à la page 51 l'auteur donne cinq exemples de fonctions, tantôt continues partout, tantôt discontinues en un point ou dans un intervalle. Guidé par l'auteur, l'étudiant participe à la construction des êtres mathématiques, il se rend mieux compte de la nécessité de certaines restrictions et de la portée des théorèmes établis. Certains chapitres du livre ne sont cependant pas faciles à lire, mais les raisonnements les plus délicats sont toujours décomposés en éléments simples; je ne pense donc pas que l'étudiant soit jamais arrêté par une démonstration, si subtile soit-elle; il apprendra en tout cas une foule de choses intéressantes et peu connues. C'est ainsi que, dans le chapitre cinq, l'auteur donne un exemple élégant imaginé par M. van der Waerden, d'une fonction continue non dérivable, exemple plus simple que ceux de Weierstrass et de Cellérier. Je signalerai encore certaines propriétés, peu connues aussi, des séries uniformément convergentes établies dans le chapitre treize, et dans la seconde partie la notion délicate d'intégrale définie, le second théorème de la moyenne et un théorème très curieux de van der Corput-Landau qui joue un rôle important dans la théorie des nombres. Enfin, dans les deux derniers chapitres, on trouve un exposé très clair des propriétés fondamentales de la fonction gamma et des séries de Fourier.

On peut juger, par ces indications et ces exemple,s quel est l'intérêt du livre de M. Landau. Un débutant y trouvera un exposé magistral des principes du calcul infinitésimal, et, à un étudiant plus avancé, l'ouvrage de M. Landau apportera des faits nouveaux et surtout des précisions nouvelles; il verra certaines théories déjà étudiées dans une perspective plus exacte et en saisira beaucoup mieux le rôle et la portée.

D. Mirimanoff (Genève).

E. Lindelöf. — **Einführung in die höhere Analysis** zum Selbststudium und für Studierende der ersten Semester. Nach der ersten schwedischen und zweiten finnischen Auflage, deutsch herausgegeben von E. Ullrich. — Un vol. in-8° de 526 pages avec 84 figures; relié, RM. 16; B. G. Teubner, Leipzig et Berlin, 1934.

Cette introduction à l'analyse supérieure correspond aux leçons que professe depuis de nombreuses années le savant professeur finlandais à l'Université de Helsingfors. La traduction allemande a été rédigée d'après la première édition suédoise et la deuxième édition finnoise par M. E. Ullrich, professeur à l'Université de Marbourg. On constate dès le début que l'ouvrage est le fruit d'une longue expérience de l'enseignement. L'auteur tient compte dans une large mesure des besoins du débutant, tout en gardant un extrême souci de l'exactitude et de la rigueur. C'est ce qui le distingue d'autres « introductions » souvent trop arides pour l'étudiant de première année. Pour faciliter le passage de l'enseignement secondaire supérieur à l'université, l'auteur reprend et complète tout d'abord les notions sur les fonctions élémentaires. Ce n'est que plus tard qu'il entreprend l'étude approfondie des nombres irrationnels.