

**Félix Klein.—Vorlesungen über die  
Hypergeometrische Funktion herausgegeben  
und mit Anmerkungen versehen von Otto  
Haupt (Die Grundlehren der Mathematischen  
Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band  
XXXIX). — Un volume gr. in-8° de x-344 pages  
et 96 fig...**

Autor(en): Buhl, A.

Objekttyp: **BookReview**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1933)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

téristique et de toutes les théories matricielles qui jouent aujourd'hui un si grand rôle en Mécanique ondulatoire. Les *représentations* de groupes constituent notamment un immense progrès; on sait qu'elles sont constituées par des matrices dont les produits se disposent comme des successions de transformations groupales; ces représentations ont considérablement augmenté la maniabilité de la Théorie des groupes. Par surcroît, l'analyse matricielle est d'une grande élégance.

Au Chapitre V, il est aisé maintenant de passer à la géométrie des espaces de Riemann, aux symboles appropriés, aux considérations géodésiques, bref à ce qui joue un si grand rôle dans la Théorie d'Einstein et se répète dans les espaces de groupes en tendant alors à réunir la première manière d'Einstein à sa théorie unitaire. Dans un ordre d'idées analogue, des considérations géométriques plus anciennes sont dues à Killing. Peut-être sont-elles d'une essence un peu moins simple que la géométrie riemannienne; quoi qu'il en soit, elles sont ici étudiées après celle-ci.

Le Chapitre VI traite des transformations de contact; malgré sa brièveté, on peut dire qu'il correspond au tome II de Lie-Engel. En l'un de ses points les plus remarquables, il revient sur les ondes avec les idées de M. Vessiot.

En résumé, ouvrage excellent, où je regrette un peu — rien n'est parfait — de ne pas trouver de citation concernant Henri Poincaré mais cependant livre de chevet pour les esprits férus de belle analyse comme pour ceux qui veulent travailler au bénéfice de la Physique théorique.

A. BUHL (Toulouse).

Félix KLEIN. — **Vorlesungen über die Hypergeometrische Funktion** herausgegeben und mit Anmerkungen versehen von Otto HAUPT (Die Grundlagen der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band XXXIX). — Un volume gr. in-8° de x-344 pages et 96 figures; broché, RM. 22, relié RM. 23,60. J. Springer, Berlin, 1933.

Je me souviens d'avoir étudié la charpente essentielle de ce volume il y a bien trente ans. Ce n'était alors, si ma mémoire ne me trahit pas, qu'une sorte de cahier autographié correspondant aux leçons professées à Göttingen en 1893-94. Refondues d'abord par Ernst Ritter, elles sont reprises maintenant, par M. Otto Haupt, annotées avec les conceptions analytiques modernes et donnent ainsi un magnifique tableau de propriétés exactes qui est probablement l'un des plus beaux monuments que l'on puisse élever à la gloire de la science mathématique telle qu'on l'entendait au siècle précédent. Mais que l'on ne déguise point ma pensée; je suis loin de dire que le monument est uniquement commémoratif et je souhaite, au contraire et très vivement, que les belles méthodes de Klein qui furent aussi celles de Poincaré, d'Appell et de M. Picard soient réétudiées en profitant de l'élégance et de la simplicité qui sont véritablement éclatantes en cette réédition.

Une première partie de l'ouvrage contient le développement de la théorie jusqu'aux travaux de Riemann inclusivement. On part de la série hypergéométrique elle-même et l'on vérifie qu'elle satisfait à une équation différentielle, linéaire et du second ordre, dont elle est solution particulière. Une intégrale hypergéométrique possède la même propriété. Gauss et Euler commencent. Des généralisations de la série apparaissent sans peine. Vingt-quatre développements, dus à Kummer, proviennent de transforma-

tions linéaires de la fonction hypergéométrique et de telles transformations conduisent naturellement au groupe de monodromie de Riemann.

Quant aux représentations intégrales, elles portent à faire une étude préliminaire de la fonction  $\Gamma$ , de cette fonction qui ne satisfait à aucune équation différentielle de constitution algébrique et qui cependant peut être constamment mêlée aux considérations hypergéométriques. Le point de vue de Riemann est surtout fonctionnel; c'est un jardin de singularités supérieurement cultivé.

C'est encore Riemann qui semble être l'instigateur de la seconde partie du volume, partie consacrée à la représentation conforme par les quotients  $\eta$ . Cet  $\eta$  désigne le quotient de deux solutions de l'équation différentielle hypergéométrique; on sait quelles visions prodigieuses il allait engendrer. C'étaient les fonctions automorphes, dites précisément, par Poincaré, fuchsienues ou kleinéennes, ainsi que nombre d'extensions. C'étaient les domaines d'automorphie si joliment construits avec des arcs circulaires et qu'il était possible de mettre en correspondance topologique avec les surfaces qui portent encore le nom de Riemann d'où un lien d'importance capitale avec les fonctions algébriques. Une analyse plus détaillée d'idées aussi grandioses ne va pas sans quelques longueurs déjà développées dans la Bibliographie de *L'Enseignement mathématique* (t. 19, 1917, p. 5 et t. 29, 1930, p. 347) à propos du tome second des *Œuvres* de Poincaré et du tome ajouté par le regretté Fatou aux *Fonctions algébriques* de Paul Appell et de M. Edouard Goursat. Seulement il faut bien observer que dans les leçons de Félix Klein nous trouvons non les développements de Poincaré mais ce qui leur a donné naissance. Quel admirable modèle. Sans doute, pour les jeunes, quelque inquiétude peut se mêler à l'admiration. Travailler Klein maintenant, n'est-ce pas s'exposer à retrouver des résultats connus? On peut faire plusieurs réponses à cette question. D'abord il y a, dans le livre même de Klein, une bibliographie qui nous apprend, par exemple, que les fonctions hypergéométriques *de plusieurs variables* ont été construites et étudiées par Paul Appell. De même pour une foule d'autres questions. En suite il y a encore beaucoup à glaner, beaucoup à repenser. Henri Poincaré n'a terminé ses célèbres mémoires sur les fonctions automorphes que d'une manière provisoire, le sujet, d'après lui, étant seulement *effleuré*. Enfin, à l'époque présente où la Physique théorique fait une si formidable consommation de groupes, particulièrement de groupes linéaires, on ne saurait trop méditer les exemples si vivants et tangibles qu'on trouve en ces pages toutes imprégnées du plus pur génie.

A. BUHL (Toulouse).

Paul MONTEL. — **Leçons sur les Fonctions univalentes et multivalentes** recueillies et rédigées par F. Marty. Avec une Note de Henri CARTAN (Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions publiée sous la direction de M. Emile BOREL). — Un vol. gr. in-8° de IV-160 pages. Prix: 40 francs. Gauthier-Villars et C<sup>ie</sup>. Paris. 1933.

Les notions de multivalence et, en particulier, d'univalence sont si naturelles qu'on se demande pourquoi elles ont tant tardé à être étudiées explicitement. De plus ce n'est pas là prétexte à échafauder des monceaux d'inégalités, comme dans la théorie de la croissance; il s'agit presque toujours de propriétés exactes ayant, le plus souvent, un aspect géométrique permet-