

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 32 (1933)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UN THÉORÈME DE COURNOT
Kapitel: 1. Un théorème d'arithmétique.
Autor: Mirimanoff, D.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-25325>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 17.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Je ne m'occuperai ici que de la première partie du théorème de Cournot.

Il n'est pas difficile de la démontrer à l'aide de la formule de STIRLING¹. Mais je ne sais si l'on a jamais cherché à l'établir d'une manière plus directe et plus naturelle. Je montrerai qu'elle se déduit très simplement d'un théorème d'arithmétique, certainement connu, dont la démonstration est immédiate.

1. Un théorème d'arithmétique.

Soient a et b deux nombres entiers premiers entre eux. Envisageons les suites

$$\frac{1}{a}, \quad \frac{2}{a}, \quad \dots, \quad \frac{a-1}{a}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{b}, \quad \frac{2}{b}, \quad \dots, \quad \frac{b-1}{b}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{a+b}, \quad \frac{2}{a+b}, \quad \dots, \quad \frac{a+b-1}{a+b}. \quad (3)$$

La suite (3) définit $a + b - 2$ intervalles. Je dis que chacun de ces intervalles contient au sens étroit l'une des fractions (1) ou (2) et une seule.

Démonstration. Rangeons l'ensemble des fractions (1) et (2) par ordre de grandeur croissante. Nous obtiendrons une suite nouvelle, que j'appellerai suite (4), qui contiendra $a + b - 2$ fractions toutes distinctes, puisque par hypothèse a est premier à b . Je dis que deux fractions de (4) qui se succèdent sont toujours séparées par une fraction (3).

En effet, lorsque les deux fractions du couple appartiennent soit à (1), soit à (2), la propriété est évidente, puisque chacune des fractions $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ est supérieur à $\frac{1}{a+b}$. Si, au contraire, l'une des fractions du couple $\left(\frac{\alpha}{a}\right)$ fait partie de (1), et l'autre $\left(\frac{\beta}{b}\right)$ de (2), elles sont séparées par la médiane $\frac{\alpha + \beta}{a + b}$, puisque les différences $\frac{\alpha + \beta}{a + b} - \frac{\alpha}{a}$, $\frac{\alpha + \beta}{a + b} - \frac{\beta}{b}$ sont de signes contraires.

¹ Cf. R. DE MONTESSUS, *Leçons élémentaires sur le Calcul des probabilités*, Paris. Gauthier-Villars, 1908. Comme me l'a fait remarquer M. Samuel DUMAS, les inégalités initiales (n° 44 de l'ouvrage cité, p. 53, lignes 4 et 8), pourtant exactes, doivent être remplacées par des inégalités de sens contraire, si l'on veut arriver à la relation finale.

Comme, d'autre part, le nombre des intervalles définis par (3) est égal au nombre des fractions de (4), chacun de ces intervalles contient une fraction de (4) et une seule. C. Q. F. D.

2. *Démonstration de la première partie du théorème II de Cournot.*

Soient s le nombre des épreuves, p la probabilité de l'événement A, $q = 1 - p$ celle de l'événement contraire B. On sait que la probabilité P (m, s) pour que l'événement A se réalise m fois au cours de s épreuves est donnée par la formule

$$P(m, s) = \frac{s!}{m! (s - m)!} p^m q^{s-m} .$$

Supposons, avec Cournot, que le rapport du nombre des événements A à celui des événements B ou bien, ce qui revient au même, que le rapport $f = \frac{m}{s}$, fréquence relative de A, demeure constant, lorsqu'on multiplie les épreuves. Si $\frac{a}{c}$ est la fraction irréductible égale à $\frac{m}{s}$, le nombre m parcourt la suite croissante des multiples an de a et le nombre s la suite croissante des multiples cn de c ($n = 1, 2, 3, \dots$). Posons $1 - f = \frac{b}{c} = \frac{c - a}{c}$. Il suffit de montrer que

$$\frac{P(a(n + 1), c(n + 1))}{P(an, cn)} < 1 ,$$

quel que soit n .

Or, le premier membre de cette inégalité s'écrit

$$\frac{(cn + 1)(cn + 2) \dots (cn + c) p^a q^b}{(an + 1)(an + 2) \dots (an + a) \times (bn + 1)(bn + 2) \dots (bn + b)}$$

et comme ¹

$$p^a q^b \leq \left(\frac{a}{c}\right)^a \left(\frac{b}{c}\right)^b ,$$

il suffit de montrer que le rapport

$$\frac{\left(n + \frac{1}{c}\right)\left(n + \frac{2}{c}\right) \dots (n + 1)}{\left(n + \frac{1}{a}\right)\left(n + \frac{2}{a}\right) \dots (n + 1) \times \left(n + \frac{1}{b}\right)\left(n + \frac{2}{b}\right) \dots (n + 1)}$$

¹ R. DE MONTESSUS, *loc. cit.*, p. 53.