

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 33 (1934)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LA MESURE DES GRANDEURS  
**Kapitel:** VI. — Grandeurs mesurables.  
**Autor:** Lebesgue, Henri  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-25998>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$t - \eta$  et  $t + \eta$  ne dépasse pas  $\varepsilon$ . En faisant tendre  $\eta$  vers zéro, on obtient un ensemble mesurable formé par la réunion de ceux qui correspondent aux valeurs positives de  $\eta$  et à la même valeur de  $\varepsilon$ ; c'est l'ensemble des points  $t, x$  pour lesquels les valeurs limites de  $X(t')$  quand  $t'$  tend vers  $t$  différent au plus de  $\varepsilon$ . Faisant enfin tendre  $\varepsilon$  vers zéro, et prenant la partie commune à tous les ensembles précédents, on obtient l'ensemble des points  $t, x$  pour lesquels la fonction  $X(t')$  est continue pour  $t' = t$ ; il est mesurable, c. q. f. d.

Cette mesure est donc nulle, c'est-à-dire qu'il est presque sûr que la fonction  $X(t)$  est presque partout continue. Il est même presque sûr qu'elle n'admet pas d'autres discontinuités qu'une infinité dénombrable de points de discontinuité de première espèce; je ne puis que renvoyer pour ce point à mes mémoires cités plus haut, sa démonstration, assez délicate, ne me semblant pas pouvoir de la même manière être simplifiée par l'application du théorème de Fubini.

---

## SUR LA MESURE DES GRANDEURS <sup>1</sup>

PAR

Henri LEBESGUE, Membre de l'Institut (Paris).

---

### VI. — GRANDEURS MESURABLES.

84. — Le programme de la première classe de l'Enseignement secondaire, la classe de Sixième, comporte un chapitre: Mesure des grandeurs, notion de fraction. Le programme de la dernière classe de l'Enseignement secondaire, celle de Mathématiques, prévoit ce même chapitre: Mesure des grandeurs. D'une classe à l'autre le point de vue devrait être très différent et à cause de l'âge des élèves et parce qu'il devrait s'agir de notion pratique en Sixième, de notion abstraite en Mathématiques.

---

<sup>1</sup> Voir *L'Enseignement mathématique*, XXXI<sup>e</sup> année, p. 173-206. — XXXII<sup>e</sup> année, p. 23-51. — XXXIII<sup>e</sup> année, p. 22-48; p. 177-213.

Aucune difficulté pour ce qui est de la Sixième; on apprend aux enfants ce que c'est qu'un tiers, un quart, trois cinquièmes en découpant en parts des galettes, les enfants comprennent parfaitement et s'intéressent en général beaucoup à cette partie de l'enseignement. Au contraire, pour ce qui est de la classe de Mathématiques, les difficultés sont considérables, si bien qu'il arrive qu'on escamote purement et simplement le chapitre ou qu'on se replace exactement au même point de vue prélogique que dans la classe de Sixième.

Il est certain, au contraire, que le chapitre a été conçu comme fort important; c'est à lui qu'on a l'habitude de renvoyer, par exemple quand, de la comparaison des volumes de deux parallélépipèdes rectangles ayant deux dimensions communes, on passe à celle relative à deux parallélépipèdes rectangles quelconques. Il devrait donc résoudre les difficultés logiques pour préparer toutes les applications. Ce chapitre a été incorporé à l'Arithmétique à cause des extensions de la notion de nombre qu'on y rattachait, mais ce rattachement s'impose aussi, parce que l'Arithmétique est la plus primitive et la plus purement logique des parties des mathématiques, si l'on veut donner au chapitre sur la mesure des grandeurs un aspect purement logique. Mais alors se pose la question de la définition logique des grandeurs. Dans la pratique, les professeurs ne donnent aucune définition; ils indiquent des exemples de grandeurs: surfaces, volumes, poids, quantités de chaleur et des exemples de notions qui ne sont pas des grandeurs: vitesses, températures, potentiels, etc.

Il est clair que cette façon de faire, qui est celle connue sous le nom de méthode directe dans l'enseignement des langues vivantes, suppose la notion de grandeur antérieurement acquise par la pratique journalière, par les connaissances physiques, par le bon sens, et qu'elle ne peut prétendre qu'à en faire connaître la dénomination. De sorte que, quand on renvoie du chapitre sur les volumes, par exemple, au chapitre sur les grandeurs pour y trouver les éclaircissements généraux, comme celui-ci ne fait concevoir les grandeurs en général que par analogie avec les volumes, on commet un cercle vicieux. Quelle est donc la difficulté à vaincre pour préciser logiquement la notion de grandeur? Elle est toute métaphysique et de même nature que celle ren-

contrée pour le nombre. De même qu'on recommandait de ne pas confondre le nombre et le symbole qui le représente, on veut distinguer entre grandeur et nombre mesurant la grandeur, on veut même se servir de la grandeur pour élargir la notion de nombre, arriver aux fractions et aux nombres plus généraux. Il s'agit donc de définir la longueur, la surface, le volume, ou plus exactement une notion comprenant longueur, surface, volume, sans parler de nombre.

De là deux attitudes: ou bien on se réfugie dans la Métaphysique; ou bien on recommence à définir à l'occasion des grandeurs l'égalité, la somme, le produit, etc., bref, on refait la théorie du nombre sans oser prononcer ce mot. On connaît bien cette seconde attitude, c'est celle à laquelle j'ai déjà fait plusieurs fois allusion et qu'on utilise, par exemple, quand on parle du rapport de deux segments considéré comme n'étant pas un nombre.

De la première, nous avons une manifestation bien curieuse dans la recommandation faite par G. Darboux, ce géomètre éminent, à J. Tannery, cet esprit critique si aiguisé: essayer « de tirer tout ce que l'on pouvait de la vieille définition *une grandeur est tout ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution* ».

Ainsi, il faudrait créer une théorie qui s'appliquerait à la fois aux volumes et à l'ambition, à la température et à l'appétit, au budget de l'Etat, à la fertilité du sol, à l'intelligence, au niveau de la Seine, à l'étonnement, etc., et en particulier à la grandeur du nombre qui mesure une grandeur. Autant dire que la vraie difficulté serait de trouver quelque chose qui n'appartienne pas à la catégorie des grandeurs qui ne soit, à aucun égard, susceptible ni d'augmentation, ni de diminution. Pour qu'une étude soit possible, il faut se restreindre; certes, le mot grandeur est couramment employé par les mathématiciens dans des sens très généraux et très divers: il arrive que tout nombre soit dénommé grandeur et, cela n'étant pas encore suffisant, à côté de ces grandeurs scalaires on considère d'autres grandeurs dont les grandeurs vectorielles sont les plus simples; mais, quand on parle de théorie des grandeurs, le mot grandeur a un sens plus restreint. Pour éviter les confusions, on a imaginé des dénominations telles que: grandeur directement mesurable; seulement il faudrait préciser à quoi s'applique de telles dénominations.

85. — On déclare généralement que, pour qu'il y ait grandeur directement mesurable, il faut qu'on puisse parler d'égalité et de somme et l'on cite comme rentrant dans la catégorie de ces grandeurs les masses, car on peut parler de masses égales, d'une masse somme de deux autres, mais on écarte les températures parce que, si on parle de températures égales, on ne parle pas d'une température somme de deux autres. Remarquez que rien n'empêcherait d'en parler, de dire que  $30^\circ$  et  $40^\circ$  font  $70^\circ$ , que toutes les fois qu'il s'agit de nombres on peut parler d'égalité et de somme, ce que l'on veut dire c'est que la somme de deux températures est sans importance *physique*. Mais quelle importance *logique* cette constatation peut-elle avoir ? Evidemment aucune et on ne saurait baser la définition logique des grandeurs sur l'intérêt physique que présentent les notions dans l'état actuel de la science. Au reste, est-il vrai que les sommes de températures sont sans importance physique; quand on parle de  $40^\circ$  centigrades on note, on étalonne une différence de températures entre un corps et la glace fondante; de même, on se sert d'une différence de températures quand on calcule l'allongement que subira un rail de l'hiver à l'été. Et qui se sert de différences, se sert par cela même de sommes; en fait, quand on dit que  $40^\circ$  centigrades font  $313^\circ$  de température absolue on a effectué une addition de températures. De même, on additionne des vitesses, dans la composition des mouvements, par exemple, on soustrait des potentiels, car on n'utilise jamais que des différences de potentiels, etc. Bref, *le critère indiqué, qui ne pouvait avoir aucune portée logique, est sans aucune signification*. Nous le retrouverons cependant tout à l'heure, mais sous une forme précisée; l'examen que nous venons d'en faire ne prouve en effet qu'une chose, c'est qu'il n'est ni clairement conçu, ni nettement exprimé et non pas qu'il est sans base.

De toute cette critique, retenons surtout que la difficulté étant causée par l'attitude trop métaphysique adoptée, nous devons essayer de la méthode qui nous a réussi dans le cas des nombres, des longueurs, des aires, des volumes; nous avons renoncé à la distinction entre le nombre métaphysique attaché à une collection et le symbole qui le représente, entre la longueur métaphysique, le nombre métaphysique qui la mesure, le symbole

qui représente ce nombre, et de même pour les aires et volumes; nous avons cherché à définir directement les nombres symboles, seuls importants en mathématiques, laissant à d'autres le soin de s'occuper des problèmes métaphysiques qui ne sont pas de notre compétence. Et, puisque tout le monde est d'accord pour voir dans les longueurs, aires, volumes, des types parfaits de grandeurs, nous aurons surtout à rechercher ce qui est commun dans ce que nous avons dit sur chacune de ces notions. C'est ce que nous allons faire, supposant donc que le chapitre sur les grandeurs en général vient après ceux sur les longueurs de segments, aires de polygones, volumes de polyèdres ou du moins après certains de ceux-ci.

La notion que nous préciserons n'englobera pas toutes celles auxquels s'appliquent les différents sens donnés au mot grandeur; nous savons qu'il faut savoir se restreindre et nous ne nous proposons nullement d'atteindre la plus grande généralité possible, mais seulement une extension qui ne diminue pas la portée qu'on entend actuellement donner au chapitre sur la mesure des grandeurs.

86. — Examinons donc quelles sont les parties communes aux diverses définitions des chapitres précédents et, puisque les masses physiques sont aussi considérées comme des types parfaits de grandeur, nous retiendrons celles de ces parties qui peuvent être transposées au cas des masses. La longueur d'un segment ou d'un arc de cercle, l'aire d'un polygone ou d'un domaine découpé dans une surface, le volume d'un polyèdre ou d'un corps ont été définis comme des nombres positifs attachés à des êtres géométriques et parfaitement définis par ces êtres, au choix de l'unité près; c'était la condition  $\alpha$ . Le cas des masses nous conduit à poser cette première partie de la définition, qui sera composée de deux parties a) et b).

a) *Une famille de corps étant donnée, on dit qu'on a défini pour ces corps une grandeur G si, à chacun d'eux et à chaque partie de chacun d'eux, on a attaché un nombre positif déterminé.*

On rappellera le procédé qui a permis de déterminer le nombre en donnant un nom à ce nombre, à cette grandeur: longueur,

volume, masse, quantité de chaleur, etc.; on dit aussi que l'on a mesuré la longueur, le volume, etc. Le procédé physique de détermination ne permet en réalité d'atteindre un nombre qu'à une certaine erreur près; il ne permet jamais de discriminer un nombre de tous ceux qui en sont extrêmement voisins. On imagine donc, comme nous l'avons fait dans le cas du procédé de mesure de la longueur d'un segment, que le procédé est indéfiniment perfectible jusqu'à conduire à un seul nombre, entièrement déterminé.

La famille des corps envisagée variera d'une grandeur à une autre; tous ces corps pourront être assimilables à des segments de droite dans certains cas, dans d'autres à des arcs de courbes, dans d'autres encore à des domaines superficiels, dans d'autres à des parties de l'espace; même, dans les enseignements moins élémentaires, on pourra considérer des portions d'espaces à plus de trois dimensions ou de variétés plongées dans de tels espaces.

87. — Le cas des masses montre que nous ne devons pas songer à généraliser la condition  $\gamma$ ) des chapitres précédents; à deux corps géométriquement égaux pourront correspondre deux nombres différents comme mesure de la grandeur  $G$  pour ces corps. Par contre, la condition  $\beta$ ) est généralisable et elle est essentielle:

b) *Si l'on divise un corps  $C$  en un certain nombre de corps partiels  $C_1, C_2, \dots, C_p$ , et si la grandeur  $G$  est, pour ces corps,  $g$  d'une part,  $g_1, g_2, \dots, g_p$  d'autre part, on doit avoir:*

$$g = g_1 + g_2 + \dots + g_p .$$

Cette condition précise celle que nous avons critiquée plus haut: on doit pouvoir parler de la somme de deux grandeurs.

Dans tout ce qui précède nous avons laissé au mot corps un caractère imprécis analogue à celui donné auparavant au mot domaine; il est clair que, en géométrie ou en physique théorique, on pourrait préciser le sens logique donné à ce mot. En géométrie, en particulier, on pourra donner au mot corps un sens plus ou moins large, par exemple celui d'ensemble ou de figure; seulement il faudra, dans chaque cas, avoir défini ce qu'on appellera

un partage de la figure totale en parties. Même, la grandeur pourrait ne pas être attachée à des données de nature géométrique mais à des données de nature plus variée. Ici, l'examen des corps assimilables géométriquement à des domaines découpés dans l'espace, ou sur des surfaces, ou sur des courbes nous suffira.

La famille des corps est d'ailleurs assujettie à une condition qu'on peut laisser sous-entendue dans l'enseignement élémentaire, mais dont la nécessité, au point de vue logique, va apparaître à l'occasion de la démonstration de l'unique théorème qui, avec la définition posée, constitue toute la théorie des grandeurs.

88. — *Lorsque deux grandeurs  $G$  et  $G_1$  sont définies pour la même famille de corps si, pour tous les corps pour lesquels  $G$  a une même valeur quelconque  $g$ ,  $G_1$  a une même valeur  $g_1$ , entre  $g$  et  $g_1$  existe la relation*

$$g_1 = kg,$$

*$k$  étant une constante.*

Pour démontrer la propriété précédente, comparons les nombres  $g$  et  $g_1$  attachés à un corps  $C$  aux nombres  $\gamma$  et  $\gamma_1$  attachés à un corps  $\Gamma$  choisi comme repère.  $n$  étant un entier quelconque, déterminons l'entier  $m$  tel que

$$\frac{m}{n} \leq \frac{g}{\gamma} < \frac{m+1}{n},$$

et partageons le corps  $C$  en  $m$  corps partiels pour lesquels  $G$  a une même valeur  $g'$  et  $\Gamma$  en  $n$  corps partiels pour lesquels  $G$  a une même valeur  $\gamma'$ . On a

$$g = mg' \quad \gamma = n\gamma' \quad g' \geq \gamma'$$

le signe  $=$  ne convenant que dans le cas où il convenait initialement. Si l'on n'est pas dans ce cas, nous pouvons diminuer chacun des  $m$  corps partiels constituant  $C$  de façon à obtenir un corps pour lequel  $G$  a la valeur  $\gamma'$ ; en d'autres termes, on peut remplacer les  $m$  corps constituant  $C$  par  $2m$  corps dont  $m$  donnent chacun à  $G$  la valeur  $\gamma'$ . Ces  $m$  derniers corps et les  $n$  qui constituent  $\Gamma$



donnant tous à  $G$  la même valeur  $\gamma'$ , donnent à  $G_1$  une même valeur  $\gamma'_1$  et on a :

$$g_1 \cong m\gamma'_1, \quad \gamma_1 = n\gamma'_1, \quad \frac{g_1}{\gamma_1} \cong \frac{m}{n},$$

le signe  $\cong$  ne convenant que dans les cas où il convenait initialement.

Appliquant ce résultat au rapport

$$\frac{\gamma}{g} < \frac{n}{m+1},$$

on trouve

$$\frac{m}{n} \leq \frac{g_1}{\gamma_1} < \frac{m+1}{n},$$

$$\left| \frac{g}{\gamma} - \frac{g_1}{\gamma_1} \right| < \frac{1}{n}.$$

Et, puisque  $n$  est un entier quelconque, on a :

$$\frac{g_1}{g} = \frac{\gamma_1}{\gamma} = k.$$

89. — Le théorème est démontré; mais, au cours de la démonstration, on a employé des décompositions des corps en corps partiels dont la possibilité ne résulte pas des hypothèses  $a)$  et  $b)$ . Je ne crois pas qu'il y ait un inconvénient quelconque à faire, dans l'enseignement, cette hypothèse supplémentaire sans le dire explicitement; mais les professeurs doivent savoir que  $a)$  et  $b)$  sont logiquement insuffisantes.

L'hypothèse supplémentaire pourrait être formulée ainsi:

*c) La famille des corps pour lesquels est définie une grandeur doit être assez riche pour que tout corps de la famille puisse être réduit à un point par diminutions successives, sans sortir de la famille et de manière qu'au cours de ces diminutions la grandeur décroisse continuellement de sa valeur primitive à zéro.*

On remarquera que, en ce qui concerne l'aire, les polygones plans forment une telle famille de corps. Que la famille plus vaste de domaines que nous avons appelés les domaines quarables satisfait aussi à la condition  $c)$  pour la grandeur aire. La

nécessité d'une condition telle que *c*) apparaît ainsi en relation avec les difficultés qui nous ont obligés à nous restreindre à certains domaines pour l'étude de l'aire ou du volume.

90. — Une autre observation que les professeurs doivent avoir faite, mais qu'il est inutile d'expliciter dans les classes, c'est que la condition *b*) peut être en partie illusoire. Considérons une famille de corps *F* constituée par la famille  $F_1$  des arcs d'une circonférence  $C_1$  et par la famille  $F_2$  des arcs d'une circonférence  $C_2$ , différente de  $C_1$ . Aux arcs de  $F_1$  attachons leur mesure prise à la façon du deuxième livre de la Géométrie à l'aide d'un arc unité  $U_1$  de  $C_1$ ; aux arcs de  $F_2$  attachons leur mesure à l'aide d'un arc unité  $U_2$  de  $C_2$ . Il sera correct de dire que tous ces nombres constituent une grandeur définie pour les corps de la famille *F*; mais, en réalité, on aura là deux grandeurs définies respectivement pour les corps de  $F_1$  et pour les corps de  $F_2$ . Toutes les fois qu'une grandeur est définie pour tous les corps d'une famille *F* et que cette famille *F* peut être divisée en deux familles  $F_1, F_2$  sans corps commun et telles que chacune d'elles contient aussi les parties des corps qui appartiennent à *F* qu'elle contient, alors la condition *b*) est illusoire en ce sens qu'elle a effet sur  $F_1$  et sur  $F_2$ , mais n'a sur *F* d'autre effet que ceux sur  $F_1$  et  $F_2$ . S'il est correct de dire que, par exemple, les longueurs des arcs de courbes à tangentes continues sont des grandeurs attachées à ces courbes, on fixe mieux la portée de *b*) en disant que les longueurs des divers arcs d'une courbe à tangentes continues sont des grandeurs.

Remarquons que les choix arbitraires de  $U_1$  et  $U_2$  auraient pu être faits dans l'exemple précédent même si les rayons de  $C_1$  et de  $C_2$  avaient été égaux. Lorsqu'il s'agit de longueurs au sens du chapitre V, et non plus de mesures au sens du deuxième livre de la Géométrie, les arcs  $U_1$  et  $U_2$  de même longueur 1 sont égaux; on s'est, en effet, imposé la condition  $\gamma$ ). En ce qui concerne les grandeurs géométriques, c'est-à-dire satisfaisant à la condition  $\gamma$ ), *b*) et  $\gamma$ ) peuvent être réunies en cet énoncé: *Un corps C qu'on peut diviser en corps égaux respectivement à des corps  $C_1, C_2, \dots, C_p$  a comme valeur G de la grandeur la somme  $g_1 + g_2 + \dots + g_p$  des valeurs de la grandeur pour  $C_1, C_2, \dots, C_p$ .*

On peut aussi, si l'on veut, convenir de donner de nouveaux sens aux mots « diviser un corps », convenir que  $C$  est divisé en  $C_1, C_2, \dots, C_p$  ou encore que  $C$  est la somme de ces corps et conserver l'énoncé  $b$ ). Il y a là l'origine d'extensions de la notion de grandeur, que je me borne à signaler, et qu'on obtiendrait en donnant au mot « diviser » des sens divers. On pourrait aussi convenir que la grandeur, au lieu d'être un nombre positif, est tout autre être mathématique pour lequel l'addition aurait été définie.

L'examen de ces généralisations sort de mon programme, mais il était utile de les signaler pour bien marquer ce que la notion envisagée seule ici a de volontairement étroit.

Voici maintenant des observations qu'il conviendrait de faire noter aux élèves: la longueur de la hauteur de la pyramide n'est pas une grandeur attachée à la pyramide, mais est une grandeur attachée au segment hauteur; l'aire de la surface d'un polyèdre n'est pas une grandeur définie pour la famille des polyèdres, mais l'aire d'une partie de la surface d'un polyèdre est une grandeur définie pour les parties de la surface considérées comme corps; la hauteur suivant  $ox$  d'un parallélépipède rectangle dont une arête est parallèle à  $ox$  n'est pas une grandeur attachée au polyèdre, mais elle en serait une si tous les polyèdres étaient découpés par des plans perpendiculaires à  $ox$  dans un même prisme rectangle indéfini.

Ainsi, un nombre est ou non une grandeur suivant le corps auquel on l'attache; il n'y a pas identité nécessaire entre la famille des corps pour lesquels il est défini et la famille de ceux pour qui il est une grandeur.

91. — *Lorsque deux grandeurs satisfont aux conditions du n° 88, c'est-à-dire quand elles sont définies pour la même famille de corps et que la valeur de l'une  $g$  détermine l'autre  $g_1$ , les deux grandeurs sont dites proportionnelles.*

Le théorème démontré prouve que du fait que  $g_1$  est fonction de  $g$ ,  $g_1 = f(g)$ , cette fonction a la forme  $g_1 = kg$ . Il n'existe donc pas de grandeurs inversement proportionnelles avec le sens précis que nous avons donné au mot grandeur, ni de grandeurs dépendant l'une de l'autre d'une autre façon que proportionnelle-

ment. Bien entendu deux nombres peuvent être liés autrement que proportionnellement, mais alors l'un au moins d'entre eux n'est pas une grandeur; si tous deux sont des grandeurs, la relation se réduit à la proportionnalité. Or la famille des grandeurs est vaste; elle comprend, nous l'avons vu, des nombres intéressant la géométrie, la physique et aussi des nombres relatifs à des questions économiques, comme le prix d'une marchandise, le temps nécessaire à sa fabrication, etc.; d'où le grand nombre de proportionnalités qu'on rencontre.

On remplacera des raisonnements un peu douteux ou franchement inadmissibles par des raisonnements corrects en démontrant que l'on a affaire à des grandeurs. Pour nous borner à des notions purement mathématiques, énumérons les grandeurs suivantes: longueurs des segments d'une droite, longueurs des arcs d'une courbe, aires des domaines d'un plan, aires des portions d'une surface, volumes des parties de l'espace, mesures des angles, mesures des arcs d'une circonférence, mesures des angles solides, mesures des parties d'une sphère, temps pris par un mobile à parcourir les segments de sa trajectoire, variations de la vitesse d'une extrémité à l'autre d'un tel segment.

Que ces nombres soient des grandeurs, cela est évident pour les deux derniers et nous l'avons démontré pour les premiers; les seuls qui exigeraient des raisonnements, que j'omets, sont les mesures, vérifiant les conditions  $\alpha$ ),  $\beta$ ),  $\gamma$ ), d'angles solides et de parties d'une sphère.

Les proportionnalités entre ces grandeurs, quand elles existent, sont alors de preuve facile. D'abord il peut arriver qu'elles soient affirmées par la question: mouvement dans lequel le mobile parcourt des espaces égaux dans des temps égaux; alors la longueur parcourue et le temps de parcours sont deux grandeurs proportionnelles attachées aux arcs parcourus; de même, dans le mouvement pour lequel la vitesse croît de quantités égales dans des temps égaux, l'accroissement de vitesse est proportionnel à l'accroissement du temps.

Dans d'autres cas, il arrive que les opérations de mesure d'une grandeur conviennent, pas à pas, pour une autre grandeur, § 21, proportionnalité des mesures d'arcs de circonférences aux angles au centre. Ce serait aussi le cas pour les mesures des parties d'une

sphère et celles des angles solides sous lesquels ces parties sont vues du centre.

92. — Notons encore que, chaque fois qu'on a prouvé qu'une grandeur est entièrement déterminée, au choix de l'unité près, par des conditions  $\alpha$ ),  $\beta$ ),  $\gamma$ ) pour une certaine famille de corps, on a démontré que deux grandeurs attachées à ces corps et satisfaisant à  $\alpha$ ),  $\beta$ ),  $\gamma$ ) sont proportionnelles. Nous verrons dans un moment qu'il y a intérêt à énoncer ce truisme mais, auparavant, notons le cas où les corps ne dépendent que d'un paramètre de grandeur; alors, dès qu'on se donne la valeur  $g$  d'une grandeur  $G$  attachée à un corps, ce corps est déterminé en grandeur; donc toute autre grandeur géométrique  $G_1$  attachée à lui est déterminée.  $G$  et  $G_1$  sont proportionnelles; ce cas est celui des arcs de cercles et des angles au centre, par exemple.

Considérons une grandeur géométrique  $g$  attachée à un angle polyèdre, la mesure de cet angle, par exemple; sa valeur ne suffira pas pour déterminer l'angle en grandeur, à cette valeur correspondront au contraire une infinité d'angles.

A ce même angle, attachons le nombre:

$$h = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \dots - (n - 2)\pi$$

$n$  étant le nombre de ses angles dièdres et  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$ ,  $\widehat{C}$ , ... leurs mesures en radians; chaque angle dièdre étant compté vers l'intérieur de l'angle polyèdre.

Si l'on décompose un angle polyèdre  $C$  en deux autres  $C_1$  et  $C_2$ , on voit de suite que l'on a  $h = h_1 + h_2$  entre les valeurs de  $h$  pour ces trois corps. De là résulte que si l'on décompose  $C$  en trièdres,  $h$  est la somme des nombres attachés à ces trièdres. Pour le cas d'un trièdre,  $h$  est positif, donc il est toujours positif. C'est donc une grandeur; de plus c'est une grandeur géométrique.

Or, les raisonnements que j'ai omis, et qui sont analogues à certains de ceux qui nous ont conduits à la notion d'aire plane, montrent qu'une grandeur géométrique attachée à un angle

polyèdre est entièrement déterminée, au choix de l'unité près; donc  $g = kh$ . Avec une unité convenable,

$$g = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \dots - (n - 2)\pi ;$$

c'est le théorème d'Albert Girard, § 74.

Legendre a démontré, sans utiliser l'axiome d'Euclide, qu'entre les angles d'un triangle plan on a l'inégalité

$$\pi - (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}) \geq 0$$

d'où, pour tout polygone plan à  $n$  sommets

$$h_1 = (n - 2)\pi - \widehat{A} - \widehat{B} - \widehat{C} \dots \geq 0 .$$

Il est évident que  $h_1$  est une grandeur géométrique attachée aux polygones plans ou est nulle. Si, raisonnant autrement que nous l'avons fait, nous avons, comme il est possible, établi l'existence de l'aire des polygones sans utiliser l'axiome d'Euclide et montré qu'elle était entièrement déterminée à l'unité près, on devrait encore conclure: ou la proportionnalité de  $h_1$  et de l'aire quand  $h_1$  est non nulle, c'est le cas de la géométrie lobatchweskienne; ou que  $h_1$  est nulle, c'est le cas de la géométrie euclidienne.

93. — L'intérêt théorique, tout aussi bien que pratique, de la notion de grandeurs proportionnelles étant ainsi mis en évidence, je remplacerais ce qu'on dit ordinairement sur les grandeurs prétendues proportionnelles à plusieurs autres par ceci:

*Soit un nombre  $g$  déterminé par plusieurs autres  $x, y, z, t$  et supposons que, lorsqu'un seul de ces derniers nombres varie,  $g$  varie proportionnellement à lui, alors on a:*

$$g = Cxyzt ,$$

*C étant une constante.*

En effet, soient  $g_0, x_0, y_0, z_0, t_0$  un autre système de nombres associés; introduisons les systèmes associés

$$g_1, x, y_0, z_0, t_0 ; \quad g_2, x, y, z_0, t_0 ; \quad g_3, x, y, z, t_0 .$$

On a :

$$\frac{g_1}{g_0} = \frac{x}{x_0}, \quad \frac{g_2}{g_1} = \frac{y}{y_0}, \quad \frac{g_3}{g_2} = \frac{z}{z_0}, \quad \frac{g}{g_3} = \frac{t}{t_0};$$

d'où

$$g = xyz t \times \frac{g_0}{x_0 y_0 z_0 t_0}.$$

La démonstration suppose toutefois que les systèmes auxiliaires de valeurs données à l'ensemble des variables ne sortent pas de la famille F de ceux pour lesquels  $g$  est définie; cette condition n'est pas indispensable, mais il est *indispensable* que l'on puisse, sans sortir de F, passer de  $x_0, y_0, z_0, t_0$  à chaque  $x, y, z, t$  de F en ne faisant jamais varier qu'une variable et qu'il y ait des systèmes  $x, y, z, t$  pour lesquels les variables soient toutes différentes de leurs valeurs initiales  $x_0, y_0, z_0, t_0$ . Il est donc nécessaire que chaque variable puisse varier seule, ce qui exclut, par exemple, le cas où  $x$  serait constamment égal à  $y$  et le cas où  $x$  et  $y$  seraient deux grandeurs proportionnelles.

Le théorème précédent est un théorème élémentaire d'algèbre; *il n'y s'agit pas de grandeurs*. Rendons-nous en compte d'abord sur l'exemple classique des parallélépipèdes rectangles. Pour la famille partielle formée de ceux de ces corps qui ont deux arêtes de longueurs données, la longueur de la troisième est une grandeur proportionnelle au volume et nous pouvons donc appliquer le théorème d'algèbre à la famille totale des parallélépipèdes rectangles avec, pour  $g$ , le volume, pour  $x, y, z$ , les longueurs des arêtes. Mais  $x, y, z$  ne sont pas des grandeurs pour cette famille totale (conf. § 90).

Plus généralement, quand on peut appliquer le théorème précédent à des nombres  $x, y, z, t, g$  l'un au moins d'entre eux n'est pas une grandeur pour la famille des corps sur laquelle on raisonne, car: *les seules grandeurs  $g$  définies pour une famille de corps F qui soient déterminées par des grandeurs  $x, y, z, t$  relatives à F, sont celles qui sont proportionnelles à l'une des grandeurs  $x$  ou  $y$ , ou  $z$ , ou  $t$* . Démontrons cela en supposant, comme plus haut, que l'on peut passer d'un corps de F à un autre par une suite de modifications ne faisant varier chacune qu'une des grandeurs  $x, y, z, t$  et telles que, pour les familles partielles de corps ainsi

obtenues, la condition *c*) soit bien vérifiée. Alors, dans une telle modification, ne faisant varier que *t*, par exemple, ou *g* est constant, c'est-à-dire ne dépend pas de *t*, ou *g* est proportionnel à *t*. Si *g* dépendait effectivement de *x*, *y*, *z*, *t* il serait donc de la forme  $Cxyz$  d'après le théorème précédent; or ceci est impossible puisqu'on n'a

$$C(\xi + x)(\eta + y)(\zeta + z)(\tau + t) = C\xi\eta\zeta\tau + Cxyz$$

pour aucun système de nombres positifs. *g* ne dépend donc pas effectivement des quatre variables *x*, *y*, *z*, *t*; ni, de même, de trois ou de deux d'entre elles; ce qui démontre la proposition.

Dans les applications de ces théorèmes on ne saurait être trop prudent; *il convient en particulier de s'assurer que la famille F est assez vaste pour que la condition relative au passage d'un corps à l'autre soit bien vérifiée.* Contrairement à ce qu'on est tenté d'admettre, il arrive fréquemment qu'elle ne l'est pas, notamment quand les corps constituant *F* ne dépendent que d'un nombre fini de paramètres. C'est pourquoi l'énoncé et la démonstration classiques du prétendu théorème sur les grandeurs proportionnelles à plusieurs autres sont inadmissibles; en effet, si, dans de tels cas, on appliquait les théorèmes ci-dessus on pourrait arriver à des conclusions bien paradoxales.

Par exemple, considérons une courbe matérielle dont la densité linéaire croisse constamment quand on se déplace dans un certain sens. La longueur *l* d'un arc et sa masse *m* suffisent à le déterminer; donc toute autre grandeur *g* attachée à cet arc est déterminée par *l* et par *m* et, d'après ce qui précède, serait proportionnelle à *l* ou à *m*. Ainsi, la longueur de la projection de l'arc sur un plan donné, la quantité de chaleur nécessaire pour élever cet arc de 1° seraient déclarées être proportionnelles à la longueur ou à la masse de l'arc!

(A suivre.)