I. — Le système des tétraèdres équivalents.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **33 (1934)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

TÉTRAÈDRE ET GÉOMÉTRIE DES MASSES

PAR

Emile Turrière (Montpellier).

Dans un précédent article, *Sur l'équivalence en Géométrie des masses* [1], j'ai traité principalement de la géométrie des masses dans ses rapports avec la Géométrie du triangle. J'ai rapidement énoncé quelques résultats concernant la géométrie tétraédrique des masses. Les considérations qui suivent sont relatives à cette dernière question.

I. — Le système des tétraèdres équivalents.

1. — Reprenons l'étude des tétraèdres T: *tout système de masses est équivalent à une infinité de systèmes de quatre masses ponctuelles égales. Les quatre points d'application de ces masses sont situés aux sommets de tétraèdres* T, *de même volume, inscrits à un ellipsoïde* E, *circonscrits à un ellipsoïde* E'; *les arêtes des tétraèdres* T *sont tangentes en leurs milieux à un ellipsoïde* E''; *les tétraèdres sont conjugués par rapport à un ellipsoïde* E''' (imaginaire). *Ces divers ellipsoïdes sont concentriques, leur centre commun est le centre de gravité* G *des tétraèdres. Ils sont homothétiques.*

Les plans tangents aux sommets des tétraèdres à l'ellipsoïde circonscrit E sont respectivement parallèles aux faces opposées des tétraèdres.

Il existe une infinité de tétraèdres T qui sont orthocentriques. Les hauteurs des tétraèdres d'orthocentre H sont quatre des

---

[1] *L'Enseignement mathématique*, 1931, XXX, pp. 62-90.

normales issues de H à l'ellipsoïde E. L'arête A_1A_2 coïncide avec l'une des directions principales de l'ellipsoïde E″ au milieu de A_1A_2. L'arête A_3A_4 est parallèle à l'autre direction principale.

Ces résultats rappelés, prenons les équations suivantes pour représenter ces divers ellipsoïdes:

$$\begin{array}{ll}
\text{E circonscrit :} & \dfrac{X^2}{A} + \dfrac{Y^2}{B} + \dfrac{Z^2}{C} = 3 \; ; \\[2ex]
\text{E}' \text{ inscrit :} & \qquad\qquad = \dfrac{1}{3} \; ; \\[2ex]
\text{E}'' \text{ tangent aux arêtes :} & \qquad\qquad = 1 \; ; \\[1ex]
\text{E}''' \text{ autopolaire ;} & \qquad\qquad = -1 \; .
\end{array}$$

L'origine est le centre G de gravité; les axes sont les axes centraux d'inertie.

Tout d'abord nous allons établir quelques formules générales relatives aux tétraèdres T en mettant en évidence les coordonnées elliptiques du milieu de l'arête A_1A_2 sur l'ellipsoïde E″ tangent aux arêtes.

2. — *Formules générales pour les tétraèdres* T. — Soit une quadrique (Q) d'équation $\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} = 1$; posons sur cette quadrique:

$$X^2 = \frac{A(A+\lambda)(A+\mu)}{(A-B)(A-C)}, \quad \text{etc.},$$

(λ, μ) étant les coordonnées elliptiques du point courant M. Une tangente quelconque à cette quadrique au point M aura des cosinus directeurs α, β, γ qui pourront être mis sous la forme:

$$\alpha = X\left(\frac{l}{A+\lambda} + \frac{m}{A+\mu}\right), \quad \text{etc.}$$

l, m étant deux paramètres. Il en résulte les relations:

$$\Sigma \frac{\alpha X}{A} = 0\,, \qquad \Sigma \alpha X = l + m\,,$$

$$1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 4(El^2 + Gm^2)\,,$$

$$\Sigma \frac{\alpha^2}{A} = -4\left(\frac{El^2}{\lambda} + \frac{Gm^2}{\mu}\right),$$

où:

$$E = \frac{1}{4} \cdot \frac{\lambda(\lambda - \mu)}{(A + \lambda)(B + \lambda)(C + \lambda)}, \quad G = \frac{1}{4} \cdot \frac{\mu(\mu - \lambda)}{(A + \mu)(B + \mu)(C + \mu)}.$$

En posant

$$l = \frac{\sin \omega}{2\sqrt{E}}, \qquad m = \frac{\cos \omega}{2\sqrt{G}},$$

on obtient:

$$\Sigma \frac{\alpha^2}{A} = -\left(\frac{\sin^2 \omega}{\lambda} + \frac{\cos^2 \omega}{\mu}\right).$$

La tangente ainsi définie au point M de la quadrique (Q) rencontre la quadrique concentrique et homothétique (Q′) d'équation

$$\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} = 3,$$

aux points de coordonnées $X + \alpha\rho$, $Y + \beta\rho$, $Z + \gamma\rho$, où le paramètre ρ a la valeur définie par l'une ou l'autre des conditions équivalentes:

$$\rho^2 \Sigma \frac{\alpha^2}{A} = 2;$$

$$\frac{4}{\rho^2} = \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu}\right) \cos 2\omega - \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}\right).$$

Considérons d'autre part une autre tangente à la quadrique (Q), au point M′ symétrique de M par rapport au centre G de (Q). Soient $\alpha'\beta'\gamma'$ les cosinus directeurs de cette tangente; nous poserons

$$\alpha' = -X\left(\frac{l'}{A + \lambda} + \frac{m'}{B + \mu}\right), \quad \text{etc.}$$

$$l' = \frac{\sin \omega'}{2\sqrt{E}} \qquad m' = \frac{\cos \omega'}{2\sqrt{G}};$$

$$\Sigma \frac{\alpha'^2}{A} = -\left(\frac{\sin^2 \omega'}{\lambda} + \frac{\cos^2 \omega'}{\mu}\right);$$

$$\frac{4}{\rho'^2} = \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu}\right) \cos 2\omega' - \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}\right).$$

Entre les deux tangentes existent les relations:

$$\Sigma \alpha\alpha' = \cos(\omega - \omega') ,$$

$$\Sigma \frac{\alpha\alpha'}{A} = - \left[\frac{\sin\omega \sin\omega'}{\lambda} + \frac{\cos\omega \cos\omega'}{\mu}\right] ;$$

Ces deux tangentes définissent par leurs intersections avec la quadrique (Q′) un tétraèdre dont les sommets ont pour coordonnées respectives:

$$\begin{array}{lll} A_1 & X + \rho\alpha , & \text{etc.,} \\ A_2 & X - \rho\alpha , & \text{etc.,} \\ A_3 & -X + \rho'\alpha' , & \text{etc.,} \\ A_4 & -X - \rho'\alpha' , & \text{etc.} \end{array}$$

Les arêtes A_1A_2 et A_3A_4 sont par construction tangentes en leurs milieux à la quadrique (Q). La condition de conjugaison des arêtes A_1A_2 et A_3A_4 par rapport à la quadrique Q,

$$\Sigma \frac{\alpha\alpha'}{A} = 0 ,$$

assure le contact des quatre autres arêtes, en leurs milieux respectifs, avec la même quadrique. Cette condition est du reste:

$$\operatorname{tang}\omega \,.\, \operatorname{tang}\omega' = -\frac{\lambda}{\mu} .$$

Les carrés des longueurs des arêtes a_{ij} du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ sont:

$$a_{12}^2 = 4\rho^2 ,$$

$$a_{34}^2 = 4\rho'^2 ,$$

$$a_{13}^2 = 4(\lambda + \mu + A + B + C) + \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\omega - \omega')$$
$$+ 4\rho(l + m) - 4\rho'(l' + m') ; \quad \text{etc.}$$

elles donnent les relations suivantes:

$$\left\{\begin{aligned} a_{12}^2 + a_{34}^2 &= 4(\rho^2 + \rho'^2)\ , \\ a_{13}^2 + a_{24}^2 &= 8(\lambda + \mu + A + B + C) + 2\left[\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\omega - \omega')\right]\ , \\ a_{14}^2 + a_{23}^2 &= 8(\lambda + \mu + A + B + C) + 2\left[\rho^2 + \rho'^2 + 2\rho\rho' \cos(\omega - \omega')\right]\ , \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} a_{12}^2 - a_{34}^2 &= 4(\rho^2 - \rho'^2)\ , \\ a_{13}^2 - a_{24}^2 &= 8\left[\rho(l + m) - \rho'(l' + m')\right]\ , \\ a_{14}^2 - a_{23}^2 &= 8\left[\rho(l + m) + \rho'(l' + m')\right]\ ; \end{aligned}\right.$$

et pour les six arêtes:

$$\Sigma a_{ij}^2 = 16(\lambda + \mu + A + B + C) + 8(\rho^2 + \rho'^2)\ .$$

Les lignes moyennes 2L, 2M, 2N de ce tétraèdre ont des expressions définies par les relations

$$\begin{aligned} L^2 &= X^2 + Y^2 + Z^2\ , \\ 4M^2 &= \rho^2 + \rho'^2 + 2\rho\rho' \cos(\omega - \omega')\ , \\ 4N^2 &= \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\omega - \omega')\ , \end{aligned}$$

avec

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \lambda + \mu + A + B + C = \lambda + \mu + 3s\ .$$

Mais la relation de conjugaison des arêtes opposées, mise sous la forme

$$\frac{\sin\omega\ \sin\omega'}{\lambda} + \frac{\cos\omega\ \cos\omega'}{\mu} = 0$$

montre que l'introduction dans les calculs de l'angle $\omega - \omega' = \varphi$ des arêtes opposées A_1A_2 et A_3A_4 simplifie notablement les diverses expressions; posons

$$\sin\omega\ \sin\omega' = \frac{\lambda}{\lambda - \mu}\cos\varphi\ ,$$

$$\cos\omega\ \cos\omega' = \frac{\mu}{\mu - \lambda}\cos\varphi\ ,$$

d'où:

$$\cos(\omega + \omega') = \frac{\mu + \lambda}{\mu - \lambda}\cos\varphi\ .$$

Nous prendrons:

$$\rho\rho' \sin\varphi = 2\sqrt{\lambda\mu} .$$

$$\rho^2 + \rho'^2 = -2(\lambda+\mu) ;$$

et par suite,

$$\Sigma a_{ij}^2 = 16(A+B+C) = 48s ,$$

$$L^2 + M^2 + N^2 = A+B+C = 3s .$$

Pour les tétraèdres considérés inscrits dans la quadrique Q′ *et dont les arêtes sont tangentes en leurs milieux à la quadrique* (Q), *sont donc constantes la somme des carrés des six arêtes et celle des carrés des trois lignes moyennes.*

La plus courte distance δ des arêtes opposées A_1A_2 et A_3A_4 est la distance des plans tangents à la quadrique Q au point (X, Y, Z) et au point diamétralement opposé. On a donc:

$$\delta = \frac{\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} + 1}{\sqrt{\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} + \frac{Z^2}{C^2}}} = 2\sqrt{\frac{ABC}{\lambda\mu}} ;$$

et par suite le volume V a pour expression:

$$V = \frac{\delta}{6}\cdot A_1A_2 \cdot A_3A_4 \cdot \sin\varphi = \frac{4}{3}\rho\rho' \sin\varphi \cdot \sqrt{\frac{ABC}{\lambda\mu}} = \frac{8}{3}\sqrt{ABC} .$$

Les tétraèdres considérés ont même volume V. Si ABC sont tous trois positifs:

$$\frac{\text{volume ellipsoïde (Q)}}{\text{volume tétraèdre}} = \frac{\pi}{2} .$$

3. — *Tétraèdres équifaciaux du système.* — L'égalité des arêtes opposées donne les trois conditions suivantes:

$$\rho^2 = \rho'^2 , \qquad l + m = 0 , \qquad l' + m' = 0 .$$

C'est aussi aux mêmes conditions que conduit l'orthogonalité deux à deux des lignes moyennes.

Les milieux des arêtes sont les sommets de la quadrique Q si le tétraèdre est équifacial. On est ainsi conduit à prendre pour milieu de l'arête A_1A_2 le sommet

$$X = \sqrt{A}\ , \qquad Y = 0\ , \qquad Z = 0\ ,$$

et à poser

$$\alpha = 0\ , \qquad \beta = \sin\theta\ , \qquad \gamma = \cos\theta\ ,$$

$$\alpha' = 0\ , \qquad \beta' = -\beta\ , \qquad \gamma' = \gamma\ .$$

avec

$$\operatorname{tg}\theta = \sqrt{\frac{B}{C}}\ .$$

Si a, b, c désignent les demi-axes de l'ellipsoïde (Q), les coordonnées des sommets d'un des tétraèdres équifaciaux appartenant au système sont

A_1	a	b	c
A_2	a	$-b$	$-c$
A_3	$-a$	b	c
A_4	$-a$	$-b$	c .

D'où une construction immédiate de ce tétraèdre équifacial et de ceux qui s'en déduisent par symétries.

Tout tétraèdre équifacial est représentable dans ce mode de représentation analytique. D'une manière générale, *le système des trois lignes moyennes d'un tétraèdre quelconque est un système de diamètres conjugués pour la quadrique tangente aux arêtes en leurs milieux.*

Le système des lignes moyennes constitue donc un système d'axes obliques pouvant être utile dans certains cas. Mais lorsque le tétraèdre est équifacial, ce système, devenant alors celui des axes de symétrie de la quadrique considérée, et par conséquent aussi de la quadrique autopolaire de centre G, de la quadrique circonscrite de Steiner et de la quadrique inscrite de Steiner, apparaît comme tout indiqué pour une étude précise du tétraèdre équifacial.

Le plan $A_2A_3A_4$ a pour équation

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} + 1 = 0\ ;$$

l'équation générale de quadriques circonscrites au tétraèdre de centre G prend la forme

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 = 1 ,$$

avec $Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 = 1$. Le rayon r de la sphère inscrite (de centre G) et le rayon R de la sphère circonscrite (de centre G) sont donnés par les formules

$$R^2 = a^2 + b^2 + c^2 ,$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} .$$

Les quatre hauteurs et les perpendiculaires menées aux faces en leurs orthocentres respectifs sont tangentes à une même sphère de centre G et de rayon δ:

$$\delta^2 = R^2 - 9r^2 .$$

4. — *Propriété caractéristique des tétraèdres équifaciaux.* — Déterminons le moment d'inertie d'un tétraèdre solide, homogène par rapport à la droite A_1G joignant un sommet au centre de gravité G.

La distance Δ_{12} de A_2 à A_1G est:

$$\Delta_{12} = \frac{\Sigma_{12}}{A_1G} .$$

Σ_{12} désignant l'aire du triangle ayant pour base A_1A_2 et pour sommet le milieu de A_3A_4. D'où (notations du paragraphe 9):

$$4 \cdot \Delta_{12}^2 \cdot \overline{A_1G}^2 = A_3^2 + A_4^2 + 2\varpi_{34} .$$

Δ_{13} et Δ_{14} désignant la distance à cette même droite A_1G des sommets A_3 et A_4, nous avons:

$$4\overline{A_1G}^2\left(\Delta_{12}^2 + \Delta_{13}^2 + \Delta_{14}^2\right) = 3\left(A_2^2 + A_3^2 + A_4^2\right) - A_1^2 .$$

Si M est la masse totale du tétraèdre, il suffit pour l'équivalence de prendre quatre masses $\frac{M}{20}$ placées aux sommets et une cinquième masse en G. Le moment d'inertie du corps relativement à la droite A_1G est donc

$$I_1 = \frac{M}{80} \cdot \frac{3\left(A_2^2 + A_3^2 + A_4^2\right) - A_1^2}{\overline{A_1 G}^2} .$$

L'ellipsoïde central d'inertie de Cauchy du tétraèdre solide ne saurait donc être en général homothétique à l'ellipsoïde de Steiner. La condition pour que cette disposition soit réalisée est l'égalité des quatre aires des faces.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'ellipsoïde central d'inertie de Cauchy soit homothétique à des ellipsoïdes de Steiner est que le tétraèdre soit équifacial.

5. — *Tétraèdres orthocentriques du système* T. — La condition d'égalité des trois sommes de carrés d'arêtes opposées se traduit par les relations:

$$\cos \varphi = 0 ,$$

$$3(\lambda + \mu) + 2(A + B + C) = 0 ;$$

il faut donc prendre

$$\omega' = 0 , \qquad \omega = \frac{\pi}{2} , \qquad \rho^2 = -2\lambda , \qquad \rho'^2 = -2\mu ,$$

$$\lambda + \mu = -\frac{2}{3}(A + B + C) = -2s ;$$

la somme des carrés d'arêtes opposées est alors:

$$a_{12}^2 + a_{34}^2 = \frac{16}{3}(A + B + C) .$$

Les arêtes A_1A_2 et A_3A_4 sont tangentes à des lignes de courbure en M et M′. Ces points M et M′ — ainsi que les autres milieux d'arêtes — sont nécessairement situés sur une sphère de centre G:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{A + B + C}{3} = s ; \qquad L^2 = M^2 = N^2 = s .$$

On peut remarquer que l'existence de l'orthocentre H implique que les normales aux sommets du tétraèdre (lorsqu'il est orthocentrique) à la quadrique circonscrite (Q′) soient concourantes. Si donc on considère les points d'intersection de la droite A_1A_2 avec la quadrique (Q), avec les notations ci-dessus introduites, la condition de concours des normales en ces deux points à la quadrique Q' se met sous la forme

$$\begin{vmatrix} \frac{X}{\alpha} & A & 1 \\ \frac{Y}{\beta} & B & 1 \\ \frac{Z}{\gamma} & C & 1 \end{vmatrix} = 0 ,$$

c'est-à-dire

$$\sum \frac{B - C}{\frac{l}{A + \lambda} + \frac{m}{A + \mu}} = 0 ,$$

qui, développée. s'écrit

$$(A - B)(B - C)(C - A)\, lm\, \lambda\mu = 0 .$$

D'où il résulte que $lm = 0$: la droite considérée, tangente en M à la quadrique (Q), doit être une tangente à l'une des deux lignes de courbure de (Q).

Ce résultat peut être obtenu en observant que la condition pour que les normales à une quadrique aux extrémités d'une de ses cordes soient concourantes est que cette corde soit portée par une droite du complexe tétraédral attaché à cette quadrique, ses homothétiques et leurs quadriques homofocales. La droite actuellement considérée doit donc être l'une des deux génératrices d'intersection du cône du complexe tétraédral par le plan tangent en M à (Q): ce sont précisément les deux directions principales en M de la quadrique (Q).

La conclusion est qu'il existe une ∞' de tétraèdres orthocentriques dans le système considéré.

Pour construire un tel tétraèdre orthocentrique, on prendra arbitrairement un point M sur la biquadratique intersection de la quadrique Q avec la sphère concentrique d'équation

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = s = \frac{A + B + C}{3} ;$$

l'arête A_1A_2, *de milieu* M, *sera l'une des deux directions principales en* M*; l'arête* A_3A_4 *sera la parallèle à l'autre direction principale de* M *menée par le point diamétralement opposé* M′ *au point* M.

Le tétraèdre est ainsi complètement déterminé. *Les arêtes appartiennent à un même complexe tétraédral et sont des tangentes à des lignes de courbure de la quadrique* (Q), *tangente aux arêtes en leurs milieux.*

La sphère considérée est la sphère orthoptique de la quadrique inscrite, concentrique et homothétique à Q, *et aussi la première sphère de douze points du tétraèdre.*

6. — *Le lieu de l'orthocentre des tétraèdres* T *orthocentriques.* — La normale au sommet A_1 du tétraèdre à la quadrique circonscrite

$$\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} - 3 = 0$$

peut être représentée paramétriquement par des équations

$$x = X_1\left(1 + \frac{t}{A}\right),$$

tandis que la normale au sommet A_2 est représentée par des équations

$$x = X_2\left(1 + \frac{t'}{A}\right).$$

Mais les coordonnées des sommets étant

$$X_1 = X\left(1 + \frac{\rho l}{A + \lambda}\right), \qquad X_2 = X\left(1 - \frac{\rho l}{A + \lambda}\right), \quad \text{etc.}$$

$$\rho^2 = -2\mu,$$

ces normales se rencontrent:

$$t = \lambda - \rho l, \qquad t' = \lambda + \rho l;$$

les coordonnées (x_0, y_0, z_0) de leur point de concours, qui n'est autre que l'orthocentre H, sont alors :

$$x_0 = X\frac{(A + \lambda)^2 - l^2\rho^2}{A + \lambda}, \quad \text{etc.}$$

on vérifie que les normales en A_3 et A_4 concourent au même point H. Les coordonnées de H en fonction des coordonnées X, Y, Z du milieu M de l'arête A_1A_2 sont en définitive fournies par les relations

$$\frac{3\,A x_0}{2\,X}(\lambda - \mu) = A(A + B + C) + 3BC - 6\lambda\mu ,$$

avec la condition

$$\lambda + \mu = -\frac{2}{3}(A + B + C) ,$$

exprimant que, sur l'ellipsoïde Q, *le point* M *a pour lieu une biquadratique sphérique :*

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{A + B + C}{3} .$$

Nous poserons:

$$A - B = \gamma , \quad B - C = \alpha , \quad C - A = \beta ;$$
$$\alpha + \beta + \gamma = 0 ;$$

A, B, C seront considérées comme racines d'une équation cubique

$$A^3 - 3sA^2 + 3qA - p = 0$$

et nous prendrons un paramètre variable θ, défini par:

$$\lambda\mu = q + \frac{A}{3} .$$

Soient encore:

$$K = 3(s^2 - q) ,$$
$$3K = A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA$$
$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -3K , \quad \alpha^2 + \beta^2 + K^2 = 6K ,$$
$$\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 = 9K^2 .$$

La biquadratique, lieu des milieux des arêtes, est alors représentée par les formules:

$$\frac{3\beta\gamma}{A}X^2 = \beta\gamma - \theta , \quad \text{etc.},$$

ou encore

$$\frac{3(A - B)(A - C)}{A} \cdot X^2 = \wp u - \varepsilon_1 \ , \quad \text{etc.} \ldots$$

les constantes elliptiques étant

$$e_1 = \beta\gamma + K \ , \qquad e_2 = \gamma\alpha + K \ , \qquad e_3 = \alpha\beta + K \ ,$$

$$e_1 - e_2 = \gamma(\beta - \alpha) = (A - B)(2C - A - B) \ ;$$

$$g_2 = 12 K^2 \ , \qquad g_3 = 4(\alpha^2\beta^2\gamma^2 - 2 K^3) \ ;$$

$$\theta = \wp u - \wp v = \wp u - K \ ,$$

$$\wp v = K \ , \qquad \wp'^2 v = -4\alpha^2\beta^2\gamma^2 < 0 \ , \qquad \wp'' v = 0 \ ,$$

$$\wp 2v = -2K \ .$$

Pour l'orthocentre H:

$$-A\beta\gamma x_0^2 = \frac{s^2 - \lambda\mu}{A^2 - 2As + \lambda\mu} = (BC + As - 2\lambda\mu)^2 \ ,$$

$$9A\beta\gamma x_0^2(\theta - K) = (2\theta + \beta\gamma)^2 \cdot (\theta - \beta\gamma) \ ,$$

$$= 4\theta^3 - 3\beta^2\gamma^2\theta - \beta^3\gamma^3 \ ,$$

$$9A\beta\gamma x_0^2 = \frac{4\theta^3 - \alpha^2\beta^2\gamma^2}{\theta - K} - 3\beta^2\gamma^2 \ ;$$

introduisons un nouveau paramètre τ, lié à θ par la relation:

$$\frac{4\theta^3 - \alpha^2\beta^2\gamma^2}{\theta - K} = 3\alpha\beta\gamma\tau \ ;$$

nous obtenons finalement les formules suivantes pour la représentation paramétrique du lieu de l'orthocentre H:

$$3Ax_0^2 = \alpha\tau - \beta\gamma \ ; \quad \text{etc.}$$

ou encore (les fonctions elliptiques n'étant pas les mêmes que celles utilisées pour la représentation ci-dessus donnée de la biquadratique lieu des milieux des arêtes):

$$A\beta\gamma x_0^2 = \wp u - e_1 ,$$
$$B\gamma\alpha y_0^2 = \wp u - e_2 ,$$
$$C\alpha\beta z_0^2 = \wp u - e_3 ;$$

$$2\alpha\beta\gamma\sqrt{ABC}\, x_0 y_0 z_0 = \wp' u \, .$$
$$\alpha\beta\gamma\tau = 3(\wp u + K^2) ,$$
$$= 3(\wp u - \wp v) ;$$

les constantes elliptiques sont:

$$3e_1 = \beta^2\gamma^2 - 3K^2 , \qquad \wp v - e_1 = -\frac{1}{3}\beta^2\gamma^2 ,$$
$$3e_2 = \gamma^2\alpha^2 - 3K^2 , \qquad \wp v - e_2 = -\frac{1}{3}\gamma^2\alpha^2 ,$$
$$3e_3 = \alpha^2\beta^2 - 3K^2 , \qquad \wp v - e_3 = -\frac{1}{3}\alpha^2\beta^2 ,$$
$$\wp v = -K^2 , \qquad \wp'^2 v = -\frac{4}{27}\alpha^4\beta^4\gamma^4 < 0 , \qquad \wp'' v = \frac{4}{3}\alpha^2\beta^2\gamma^2 .$$
$$\left(\frac{\wp'' v}{\wp' v}\right)^2 = -12 , \qquad \wp 2v = 2K^2 - 3 .$$
$$3(e_1 - e_2) = \gamma^3(\alpha - \beta) = (A - B)^3(A + B - 2C) ; \quad e_1 - e_2 = \gamma(J - CK) ,$$
$$g_2 = \frac{4}{3}K(9K^3 - 2\alpha^2\beta^2\gamma^2) ,$$
$$g_3 = \frac{4}{27}\left[(\alpha^2\beta^2\gamma^2 - 9K^3)^2 - 27K^6\right] .$$

Supposons $A > B > C$; les points réels de la biquadratique (H) correspondent aux points de l'ovale de la cubique de Weierstrass.

Il y a dégénérescence lorsque $A + C = 2B$. C'est en même temps le cas de dégénérescence des fonctions elliptiques représentatives du lieu des milieux des arêtes des tétraèdres orthocentriques T.

Le lieu de l'orthocentre est ainsi une biquadratique gauche définie par les quadriques:

$$Ax_0^2 + By_0^2 + Cz_0^2 = K \ ,$$

$$A^2x_0^2 + B^2y_0^2 + C^2z_0^2 = J \ ,$$

avec:

$$J = 3\,ABC + 9\,s^3 - 12\,qs = 3\,(ABC + Ks - qs) \ ;$$

$$-3\,J = A\beta\gamma + B\gamma\alpha + C\alpha\beta \ ;$$

à signaler aussi la quadrique

$$\Sigma\, A\,(B + C)\,x_0^2 = 3\,(sq - p)$$

ainsi que le cône de sommet G dirigé par la biquadratique:

$$\Sigma\, A\,(B - C)^2\,(B + C - 2\,A)\,x_0^2 = 0 \ .$$

La courbe est à comparer à la *polhodie de Poinsot*, pour l'analogie des équations. Le plan tangent à la quadratique

$$\Sigma\, Ax_0^2 = K \ ,$$

le long de cette biquadratique reste tangent à une sphère de centre G.

Il y a décomposition en deux coniques symétriques dans le cas singulier de dégénérescence des fonctions elliptiques $A + C = 2B$. Les ellipsoïdes fondamentaux $EE'E''E'''$ liés au système des tétraèdres sont à hyperbole focale équilatère. L'ellipsoïde

$$\Sigma\, Ax_0^2 = K \ ,$$

polaire réciproque de E par rapport à une sphère concentrique, a ses plans cycliques orthogonaux, sous cette condition

$$A + C = 2\,B \ , \qquad \alpha = \gamma \ .$$

Le cône se décompose alors en deux plans passant par l'axe moyen:

$$\sqrt{A}\,x_0 = \pm\,\sqrt{C}\,z_0 \ .$$

Le cône de sommet G et contenant la biquadratique lieu des milieux des arêtes se décompose en même temps en les deux plans:

$$\sqrt{C}\,X = \pm \sqrt{A}\,Z\ .$$

7. — *Les deux autres normales issues de l'orthocentre.* — Lorsque le tétraèdre T est orthocentrique, quatre des normales issues de l'orthocentre H à l'ellipsoïde E circonscrit sont les hauteurs du tétraèdre. Voici des propriétés des deux autres normales, *qui sont d'ailleurs réelles.*

Si la cubique des normales relatives à l'ellipsoïde de Steiner E (j'ai précédemment spécifié que parmi l'infinité d'ellipsoïdes circonscrits de centre G, je donnais le nom d'ellipsoïde de Steiner à celui dont les plans tangents sont parallèles aux faces du tétraèdre, parce que cet ellipsoïde seul généralise l'ellipse steinerienne circonscrite de la Géométrie du triangle) est représentée par les équations

$$x_0 = x\left(1 + \frac{t}{A}\right) \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{Ax_0}{t + A}\ ,$$

l'équation du problème des normales est l'équation du sixième degré

$$\sum \frac{Ax_0^2}{(t + A)^2} = 3\ .$$

Soient $t_1 t_2 t_3 t_4$ les paramètres correspondant aux quatre sommets $A_1 A_2 A_3 A_4$ et $t_5 t_6$ les deux autres solutions $M_5 M_6$. Nous avons les relations telles que

$$A\beta^2\gamma^2 x_0^2 = -\,3\,(A + t_1)\,(A + t_2)\,(A + t_3)\,(A + t_4)\,(A + t_5)\,(A + t_6)\ ;$$

d'autre part

$$x_1 - x_2 = (t_2 - t_1)\cdot\frac{Ax_0}{(A + t_1)\,(A + t_2)}\ ,$$

$$2\,X = x_1 + x_2 = Ax_0\left(\frac{1}{A + t_1} + \frac{1}{A + t_2}\right)\ .$$

La condition d'orthogonalité d'un couple d'arêtes opposées (à remarquer que cette condition est unique) du tétraèdre prend la forme

$$\sum \frac{A^2 x_0^2}{(A + t_1)(A + t_2)(A + t_3)(A + t_4)} = 0$$

et se met finalement sous la forme

$$\Sigma A \alpha^2 (A + t_5)(A + t_6) = 0$$

établissant une relation involutive entre t_5 et t_6. De même en écrivant que M, milieu de A_1A_2, est sur la quadrique E'', nous obtenons la relation

$$\sum \frac{A x_0^2}{(A + t_1)(A + t_2)} = -1 ,$$

qui, combinée avec la relation analogue entre t_3 et t_4, donne, compte tenu de la relation d'orthogonalité,

$$\sum \frac{A x_0^2}{(A + t_1)(A + t_2)(A + t_3)(A + t_4)} = 0 .$$

L'autopolarité du tétraèdre par rapport à E''' conduirait d'ailleurs au même résultat. D'où une nouvelle relation involutive entre t_5 et t_6:

$$\Sigma \alpha^2 (A + t_5)(A + t_6) = 0 .$$

En résumé, les trois expressions $\alpha^2(A + t_5)(A + t_6)$ sont proportionnelles à B — C, C — A, A — B et par suite les trois expressions

$$\alpha (A + t_5)(A + t_6) ,$$

sont égales entre elles. D'où:

$$t_5 + t_6 = -2s , \qquad t_5 \cdot t_6 = q ;$$

t_5 et t_6 sont les racines de l'équation du second degré

$$t^2 + 2st + q = 0 ,$$

$$\frac{d}{dt} \cdot (t^3 + 3st^2 + 3qt + p) = 0 ,$$

dérivée de l'équation cubique ayant — A, — B, — C pour racines

$$\frac{1}{t+A}+\frac{1}{t+B}+\frac{1}{t+C}=0\ ;$$

$$(t_5-t_6)^2=\frac{4}{3}K>0\ .$$

$$(A+t_5)(A+t_6)=-\frac{\beta\gamma}{3}\ .$$

Les points M_5M_6 sont toujours réels. Le milieu de la corde M_5M_6 a pour coordonnées ξ, η, ζ:

$$\xi=\frac{A(\beta-\gamma)}{\beta\gamma}x_0\ ,\quad \text{etc.},$$

il décrit donc une biquadratique gauche affine au lieu de l'orthocentre H. Le faisceau des quadriques définissant cette nouvelle biquadratique a pour équation:

$$\sum\frac{\beta^2\gamma^2}{(\beta-\gamma)^2}\left(1+\frac{\varphi}{A}\right)\xi^2=J+\varphi K\ ;$$

le cône de sommet G:

$$\sum\frac{\xi^2}{A(B+C-2A)}=0\ .$$

8. — *Lieu des sommets des tétraèdres orthocentriques.* — Moins simple est le lieu des sommets des tétraèdres orthocentriques.

Les plans des faces enveloppent une développable circonscrite à E′ et à la surface polaire réciproque de la surface normopolaire de la quadrique circonscrite. Les sommets A_i sont situées *sur la courbe d'intersection de* E *et d'une surface homothétique à la surface normopolaire de* E.

Les calculs relatifs à la surface normopolaire montrent que l'on a tout d'abord les relations suivantes pour M_5 et M_6:

$$\frac{x}{x_0}+\frac{y}{y_0}+\frac{z}{z_0}=3\ ,$$

$$\frac{x}{Ax_0}+\frac{y}{By_0}+\frac{z}{Cz_0}=0\ ,$$

la droite M_5M_6 est donc l'intersection de ces deux plans: d'où les expressions des coordonnées de cette droite. En outre, on obtient pour les sommets le lieu

$$\sum \frac{1}{\alpha}\left(\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}\right)\left(\frac{x^2}{A}-\frac{1}{3}\right)=0\ ;$$

(c'est la surface déduite de la surface normopolaire en écrivant que le point de coordonnées $-3x$, $-3y$, $-3z$ est sur la surface normopolaire). Le lieu des sommets du tétraèdre est ainsi la courbe d'intersection de la quadrique

$$\sum \frac{x^2}{A}=3$$

et de la surface du quatrième degré:

$$\sum \frac{1}{\alpha}\left(\frac{x^2}{A}-3\right)\left(\frac{x^2}{A}-\frac{1}{3}\right)=0\ .$$

II. — La géométrie des quadruplets.

9. — *Généralités.* — Soit un tétraèdre de référence $A_1A_2A_3A_4$. Nous désignerons par A_i l'aire de la face opposée au sommet A_i et par a_{ij} la longueur de l'arête joignant les sommets A_i et A_j. V désignera le volume du tétraèdre.

L'équation d'un plan quelconque P en coordonnées barycentriques étant $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4=0$, les coordonnées u_i du plan seront les distances respectives de ce plan aux sommets A_i du tétraèdre, sous l'unique condition que ces coordonnées u_i satisfassent à la relation fondamentale:

$$\Phi = 9V^2\ ,$$

dans laquelle Φ représente la forme quadratique suivante à 6 termes

$$\Phi = \Sigma\varpi_{ij}(u_i-u_j)^2\ .$$