

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 33 (1934)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** TÉTRAÈDRE ET GÉOMÉTRIE DES MASSES  
**Autor:** Turrière, Emile  
**Kapitel:** III. — La géométrie des masses du tétraèdre orthocentrique.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-25999>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

III. — LA GÉOMÉTRIE DES MASSES DU TÉTRAÈDRE  
ORTHOCENTRIQUE.

15. — Pour un tétraèdre quelconque, la formule à six termes

$$\overline{MM'}^2 = - \sum a_{ij}^2 \Delta x_i \Delta x_j$$

donnant le carré de la distance de deux points ne peut pas être mise sous la forme

$$\overline{MM'}^2 = \sigma \cdot \sum \lambda_i \cdot (\Delta x_i)^2$$

analogue à celle de la géométrie plane. Puisque  $\sum \Delta x_i = 0$ , l'existence d'une telle formule entraîne la relation

$$0 = \sigma \sum \lambda_i (\Delta x_i)^2 + \sum a_{ij}^2 \Delta x_i \Delta x_j \equiv \sigma \sum \lambda_i \cdot \sum (\Delta x_i) ,$$

ce qui exige

$$a_{ij}^2 = \sigma (\lambda_i + \lambda_j) ,$$

et par suite:

$$a_{12}^2 + a_{34}^2 = a_{13}^2 + a_{24}^2 = a_{14}^2 + a_{23}^2 = \sigma (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) ;$$

les sommes des carrés d'arêtes opposées sont égales et le tétraèdre est orthocentrique.

Le tétraèdre orthocentrique est caractérisé par l'existence de quatre nombres  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$  tels que

$$a_{ij}^2 = \sigma (\lambda_i + \lambda_j) .$$

Il en résulte que les aires des quatre faces sont données par les formules:

$$4A_1^2 = \sigma^2 (\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_4 + \lambda_4 \lambda_2) \text{ etc.},$$

ce qui exige que les paramètres  $\overline{\omega}_{ij}$  aient les expressions suivantes :

$$4\overline{\omega}_{12} = \sigma^2 \cdot \lambda_3 \lambda_4 , \text{ etc....}$$

On a enfin la condition

$$36V^2 = \sigma^3 \cdot \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \sum \frac{1}{\lambda_i} .$$

La condition de rencontre des hauteurs d'un tétraèdre quelconque

$$(A_1 H) \quad \frac{x_2}{\varpi_{12}} = \frac{x_3}{\varpi_{13}} = \frac{x_4}{\varpi_{14}} ,$$

est

$$\varpi_{12} \cdot \varpi_{34} = \varpi_{13} \cdot \varpi_{24} = \varpi_{14} \cdot \varpi_{23} ;$$

elle exige que  $\varpi_{ij}$  soit de la forme  $\varpi_{ij} = \rho \cdot \mu_i \cdot \mu_j$  avec quatre paramètres  $\mu_i$ , ce qui revient à prendre, avec les notations ci-dessus:

$$4\varpi_{12} = \sigma^2 \lambda_3 \lambda_4 .$$

Dans ces conditions, si les coordonnées barycentriques de l'orthocentre H sont  $(H_i)$  avec  $\sum H_i = 1$ , on devra poser:

$$H_i = \frac{1}{\lambda_i} ,$$

avec:

$$\sigma^3 = 36V^2 \cdot H_1 H_2 H_3 H_4 .$$

$$36V^2 = \sigma^3 \cdot \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 .$$

16. — *Forme spéciale de l'équation cubique pour les tétraèdres orthocentriques.* — Considérons le produit

$$\begin{aligned} \Pi = & \left( \omega - \frac{\sigma}{M} m_1 \theta_1 \right)^{m_1} \cdot \left( \omega - \frac{\sigma}{M} m_2 \theta_2 \right)^{m_2} \cdot \left( \omega - \frac{\sigma}{M} m_3 \theta_3 \right)^{m_3} \\ & \cdot \left( \omega - \frac{\sigma}{M} m_4 \theta_4 \right)^{m_4} , \end{aligned}$$

avec des paramètres  $\sigma$  et  $\theta_i$  non précisés pour le moment. L'équation  $\frac{d\Pi}{d\omega} = 0$  s'écrit

$$\begin{aligned} \sum \frac{m_i}{M\omega - \sigma m_i \theta_i} &= 0 , \\ M\omega^3 - \mathcal{P}\omega^2 + \mathcal{Q}\omega - \mathcal{R} &= 0 , \end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{P} = \frac{\sigma}{M} \cdot \Sigma \theta_1 m_1 (m_2 + m_3 + m_4) ,$$

$$\mathcal{Q} = \frac{\sigma^2}{M^2} \cdot \Sigma m_1 (m_2 m_3 \theta_2 \theta_3 + m_3 m_4 \theta_3 \theta_4 + m_4 m_2 \theta_4 \theta_2) ,$$

$$\mathcal{R} = \frac{\sigma^3}{M^3} m_1 m_2 m_3 m_4 \Sigma \theta_2 \theta_3 \theta_4 .$$

Elle est identique à celle donnant les moments d'inertie centraux du quadruplet  $(m_i)$  si les conditions suivantes sont vérifiées simultanément:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma m_i m_j [\sigma(\theta_i + \theta_j) - a_{ij}^2] = 0 , \\ \Sigma m_2 m_3 m_4 [\sigma^2(\theta_2 \theta_3 + \theta_3 \theta_4 + \theta_4 \theta_2) - 4A_1^2] = 0 , \\ \sigma^3 \Sigma \theta_2 \theta_3 \theta_4 = 36 V^2 . \end{array} \right.$$

Ces conditions sont remplies quelles que soient les masses  $m_i$  si le tétraèdre est orthocentrique avec  $\theta_i = \lambda_i$ .

Ainsi donc — et c'est encore une propriété caractéristique des tétraèdres orthocentriques — l'équation en  $\omega = \frac{I}{M}$  aux moments centraux planaires d'inertie dans le cas d'un quadruplet disposé aux sommets d'un tétraèdre orthocentrique est identique à l'équation donnant les maximum et minimum de la fonction suivante  $\Pi(\omega)$ :

$$\Pi \left( \omega - \frac{\sigma}{M} \cdot m_i \lambda_i \right)^{m_i} .$$

17. — Une propriété analogue est à signaler pour la géométrie plane. Pour un triangle quelconque, on aura à considérer l'équation aux maximum — minimum du produit:

$$\Pi = \left( \omega - \frac{\sigma}{M} \alpha p \right)^\alpha \cdot \left( \omega - \frac{\sigma}{M} \beta q \right)^\beta \cdot \left( \omega - \frac{\sigma}{M} \gamma r \right)^\gamma ,$$

$\alpha, \beta, \gamma$  sont les masses placées aux sommets du triangle ABC;  $M = \alpha + \beta + \gamma$ , la masse totale;  $\sigma = 2S$ ;  $I = M\omega$ ;  $p = \cotg A$ ,  $q = \cotg B$ ,  $r = \cotg C$ ;  $a^2 = \sigma(q + r)$ , etc. Toutes ces formules sont analogues à celles relatives au tétraèdre orthocentrique.

18. — *Formules spéciales au tétraèdre orthocentrique.* — Les calculs de la Géométrie des masses, en coordonnées barycentriques, se présentent généralement sous une forme simplifiée lorsque le tétraèdre de référence est orthocentrique. Nous poserons en introduisant quatre paramètres  $\alpha_i$

$$a_{ij}^2 = \alpha_i + \alpha_j, \quad 4\bar{\omega}_{12} = \alpha_3\alpha_4, \quad \text{etc.}$$

les coordonnées de l'orthocentre H seront  $H_1H_2H_3H_4$ :

$$\alpha_1 H_1 = \alpha_2 H_2 = \alpha_3 H_3 = \alpha_4 H_4 = h,$$

$$H_1 + H_2 + H_3 + H_4 = 1$$

$$h = \sum \frac{1}{\alpha_i}.$$

Pour le volume V du tétraèdre fondamental:

$$h^3 = 36V^2 \cdot H_1 H_2 H_3 H_4,$$

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 = 36V^2 h;$$

$$A_1^2 = \frac{9V^2}{h} H_1 (1 - H_1), \quad \bar{\omega}_{12} = \frac{9V^2}{h} \cdot H_1 H_2.$$

Les hauteurs  $h_i$  des tétraèdres:

$$h_i^2 = \frac{\alpha_i}{1 - H_i} = \frac{h}{H_i (1 - H_i)}.$$

La distance  $MM'$  de deux points  $M(x_i)$  et  $M'(x'_i)$  est généralement dans le cas du tétraèdre orthocentrique

$$\overline{MM'}^2 = \sum \alpha_i \cdot (\Delta x_i)^2,$$

$$\sum x_i = 1, \quad \sum x'_i = 1, \quad \Delta x_i = x_i - x'_i.$$

En particulier, la distance d'un point quelconque  $M(x_i)$  de l'espace à l'orthocentre H prend la forme:

$$\overline{HM}^2 = -h + \sum \alpha_i x_i^2, \quad \sum x_i = 1;$$

le rayon  $\rho$  de la sphère conjuguée est défini par la relation

$$\rho^2 = -h;$$

l'équation de la sphère conjuguée est :

$$\Sigma \alpha_i x_i^2 = 0 .$$

La formule donnant la distance  $r = HM$  d'un point quelconque  $M$  à l'orthocentre est donc

$$r^2 - \rho^2 = \Sigma \alpha_i x_i^2 .$$

Distances de l'orthocentre aux sommets  $A_i$  du tétraèdre :

$$\overline{HA}_i^2 = \alpha_i - h .$$

Soit  $\alpha$  le rayon de la première sphère des douze points, dont le centre est le centre  $G$  de gravité du tétraèdre homogène :

$$\overline{GH}^2 = \alpha^2 + \rho^2 , \quad GH = OG .$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 16 \alpha^2 ,$$

$$\Sigma a_{ij}^2 = 48 \alpha^2 .$$

Si  $R$  est le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre de centre  $O$  :

$$\overline{OH}^2 = 4(\alpha^2 + \rho^2) = R^2 + 3\rho^2 , \quad \overline{OG}^2 = \alpha^2 + \rho^2 = R^2 - 3\alpha^2 ,$$

$$R^2 = 4\alpha^2 + \rho^2 ,$$

$$\Sigma \overline{HA}_i^2 = 4R^2 .$$

Les coordonnées  $O_i$  du centre de la sphère circonscrite  $O$  sont définies par les équations

$$\Sigma O_i = 1 , \quad H_i + O_i = \frac{1}{2} .$$

19. — Avec les notations précédentes, l'équation cubique aux moments d'inertie centraux  $I$  pour un centre des masses  $\Gamma_i$  est celle qui donne le maximum ou le minimum du produit :

$$\Pi (I - m_i \alpha_i)^{m_i} ,$$

c'est-à-dire l'équation :

$$\sum_1^4 \frac{m_i}{I - m_i \alpha_i} = 0 .$$

Sous cette forme — spéciale aux tétraèdres orthocentriques — il est manifeste que les racines sont réelles; elles sont séparées par les nombres  $m_i \alpha_i$ .

Les moments principaux centraux étant  $I_1, I_2, I_3$ , on a pour le tétraèdre orthocentrique :

$$M(I_1 + I_2 + I_3) = M \cdot \Sigma m_i \alpha_i - \Sigma \alpha_i m_i^2 ;$$

$$M(I_1 I_2 + I_2 I_3 + I_3 I_1) = \Sigma \alpha_1 \alpha_2 m_1 m_2 (m_3 + m_4) ;$$

$$M I_1 I_2 I_3 = 36 V^2 m_1 m_2 m_3 m_4 .$$

Pour que l'ellipsoïde central d'inertie en  $\Gamma$  soit une sphère, il faut que la quadrique conjuguée au tétraèdre, de centre  $\Gamma$  soit une sphère: ce qui exige que le tétraèdre soit orthocentrique et que  $\Gamma$  soit l'orthocentre  $H$ . Pour  $m_i = H_i$ , l'équation cubique a bien une racine triple  $I = h$ .

Dans un tétraèdre orthocentrique, l'équation du cercle de l'infini se simplifie:

$$\Phi = \Sigma \varpi_{ij} (u_i - u_j)^2 = \frac{9 V^2}{h} [\Omega - \Pi^2] ,$$

en posant:

$$\Omega = \Sigma H_i u_i^2 , \quad \Pi = \Sigma H_i u_i ;$$

$\Pi = 0$  est l'équation tangentielle de l'orthocentre;  $\Omega = 0$  est l'équation tangentielle de la sphère conjuguée. La condition pour que les  $u_i$  soient les distances aux sommets du plan ( $u_i$ ) est donc:

$$\Phi = 9 V^2 , \quad \Omega - \Pi^2 = h .$$

La condition entre les cosinus directeurs  $h_i \delta_i$  d'une direction quelconque avec les hauteurs du tétraèdre, est dans le cas des tétraèdres orthocentriques

$$-\Delta \equiv \Sigma \alpha_i \delta_i^2 = 1 .$$

La perpendiculaire au plan  $u_i$  est définie par les relations

$$\alpha_i \delta_i = \Pi - u_i ,$$

ou

$$h \delta_i = H_i (\Pi - u_i) ,$$

les  $u_i$  satisfaisant à la condition  $\Phi = 9V^2$  et les  $\delta_i$  à la condition  $\Delta = -1$ .

Le centre des masses  $\Gamma(m_i)$  associé à un plan donné  $u_i$  est défini par les relations :

$$m_i = H_i \left( \frac{\Pi}{u_i} - 1 \right) .$$

Le moment d'inertie correspondant est, avec ces expressions des masses,

$$I = \Sigma m_i u_i^2 = \rho^2 ,$$

égal au carré du rayon de la sphère conjuguée.

Inversement, si les masses  $m_i$ , quelconques, sont données, le plan principal et central d'inertie, correspondant à la racine  $I$  de l'équation cubique a pour équation :

$$\sum \frac{X_i}{I - m_i \alpha_i} = 0 .$$

20. — *Cas particuliers.* —  $\Gamma$  est dans le plan  $A_1A_2H$ .

$$\frac{m_3}{H_3} = \frac{m_4}{H_4} ;$$

l'équation cubique admet alors la racine simple  $I = h$ . Le plan central correspondant est le plan :

$$u_1 = 0 \quad u_2 = 0 \quad \frac{u_3}{\alpha_3} + \frac{u_4}{\alpha_4} = 0 ,$$

$$\frac{X_3}{H_3} = \frac{X_4}{H_4} ;$$

c'est-à-dire le plan  $A_1A_2H$ .

$\Gamma$  est sur la hauteur  $A_1H$ . Prenons :

$$m_2 = H_2 , \quad m_3 = H_3 , \quad m_4 = H_4 ;$$

racine double  $I = h$ ; racine simple:  $I = \frac{m_1 \alpha_1}{M}$ . Les plans centraux sont les plans passant par la hauteur et le plan mené par  $\Gamma$  parallèlement à la base correspondante. La quadrique d'inertie est de révolution autour de la hauteur.



21. — *Propriétés des tétraèdres orthocentriques solides, homogènes, avec deux arêtes opposées égales.* — L'équation cubique en I, mise sous la forme

$$\frac{I(m_1 + m_2) - m_1 m_2 (\alpha_1 + \alpha_2)}{(I - m_1 \alpha_1)(I - m_2 \alpha_2)} + \frac{I(m_3 + m_4) - m_3 m_4 (\alpha_3 + \alpha_4)}{(I - m_3 \alpha_3)(I - m_4 \alpha_4)} = 0 ,$$

admet la racine simple

$$I = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2) m_1 m_2}{m_1 + m_2} ,$$

dans le cas particulier où le point  $\Gamma$  est sur la surface cubique d'équation

$$\frac{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}}{a_{12}^2} = \frac{\frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4}}{a_{34}^2} .$$

C'est une surface cubique, circonscrite au tétraèdre, passant par l'orthocentre; elle est, dans la transformation  $X_i X'_i = 1$ , réciproque du plan d'équation

$$\frac{X_1 + X_2}{a_{12}^2} = \frac{X_3 + X_4}{a_{34}^2}$$

parallèle aux arêtes  $A_1 A_2$  et  $A_3 A_4$ , mené par le point  $(\alpha_i)$  réciproque de l'orthocentre.

Ainsi sont mises en évidence, trois surfaces cubiques circonscrites au tétraèdre orthocentrique auxquelles correspondent des cas de résolution de l'équation cubique.

En particulier, si le tétraèdre orthocentrique a deux arêtes opposées égales

$$a_{12} = a_{34} ,$$

la surface correspondante

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4}$$

contient le centre de gravité G. D'où le résultat suivant:

Lorsque, dans un tétraèdre orthocentrique, solide et homogène, deux arêtes opposées sont égales, l'équation aux moments d'inertie centraux de ce corps admet une racine rationnelle :

$$a_{12} = a_{34}, \quad M = \text{masse du tétraèdre} .$$

$$I = \frac{M}{20} a_{12}^2 .$$

(c'est la valeur du moment central du tétraèdre régulier d'arête  $a_{12}$ ).

22. — *Application aux tétraèdres homogènes avec un trièdre trirectangle.* — Dans le cas d'un tétraèdre OABC, trirectangle en O,

$$OA = a, \quad OB = b, \quad OC = c,$$

l'équation de l'ellipsoïde central par rapport aux axes rectangulaires parallèles à OA, OB et OC est :

$$\begin{aligned} 3(b^2 + c^2)X^2 + 3(c^2 + a^2)Y^2 + 3(a^2 + b^2)Z^2 \\ + 2bcYZ + 2caZX + 2abXY = \frac{80}{M} . \end{aligned}$$

Prenons une densité telle que  $M = 80$ . L'équation en S de l'ellipsoïde prend la forme :

$$\begin{aligned} \tau^3 + (2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - 3a^4 - 3b^4 - 3c^4)\tau \\ + 2(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) = 0, \end{aligned}$$

en posant :

$$S = 2(a^2 + b^2 + c^2) - \tau .$$

Sous cette forme, lorsque deux arêtes opposées sont égales (par exemple  $c^2 = a^2 + b^2$ ), l'équation a bien une racine rationnelle  $\tau = 0$ ,  $S = 4c^2$ , conformément au théorème précédent.