I. — Sur les équations du type parabolique réductibles à l'équation de la chaleur.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **33 (1934)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

LIGNES ASYMPTOTIQUES
ET ÉQUATION DE LA CHALEUR

PAR

René Guigue (Bonneville, Haute-Savoie).

I. — Sur les équations du type parabolique réductibles à l'équation de la chaleur.

1. — Parmi les équations aux dérivées partielles du second ordre du type parabolique il en est une dont l'importance est capitale car elle intervient dans de nombreux problèmes. C'est l'équation dite de la chaleur

$$t = p \, . \tag{1}$$

Considérons d'abord une équation de la forme

$$r - 2\lambda s + \lambda^2 t + ap + bq + cz + d = 0 \, , \tag{2}$$

où λ, a, b, c, d sont des fonctions des seules variables x et y. On sait [1] que par un premier changement de variables convenablement choisi on peut ramener cette équation à la forme

$$t + f(x\, ,\, y)\, p = 0 \tag{3}$$

(je remets x et y à la place des nouvelles variables). Il me suffira donc de considérer des équations (2) déjà mises sous la forme (3).

Ceci étant admis, je vais examiner les possibilités de ramener une équation (3) à l'équation (1) par un simple changement de variables.

[1] Voir Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. I, p. 152 ou Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. I, p. 194.

Un premier cas très simple où cela peut se faire est celui où la fonction $f(x, y)$ ne dépend que de x seul, $f(x, y) = \mathrm{X}$. On constate sans difficulté qu'en conservant la variable y et en remplaçant la variable x par x' tel que

$$x' = -\int \frac{dx}{\mathrm{X}}, \tag{4}$$

l'équation

$$t + \mathrm{X}p = 0$$

s'écrit

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial z}{\partial x'} .$$

On a à effectuer un changement de variables de ce genre quand on cherche les surfaces qui admettent un système d'asymptotiques situées sur des cylindres circulaires de même axe oz. En coordonnées cylindriques on est conduit à l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + r\frac{\partial z}{\partial r} = 0 ,$$

qui s'écrit

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \frac{\partial z}{\partial u} ,$$

si l'on pose $u = -\log r$.

Ce résultat est dû à BIANCHI. On pourra consulter à ce sujet un article de M. A. BUHL (Lignes asymptotiques et lignes de courbure, *Journal de Mathématiques*, 1929, p. 59).

2. — Prenons maintenant le cas général où la fonction $f(x, y)$ dépend à la fois de x et y et efforçons-nous de le ramener au précédent.

Soient

$$x' = \lambda(x, y) , \qquad y' = \mu(x, y)$$

les équations qui définissent le changement de variables. On a alors

$$p = \lambda_x \frac{\partial z}{\partial x'} + \mu_x \frac{\partial z}{\partial y'} , \qquad q = \lambda_y \frac{\partial z}{\partial x'} + \mu_y \frac{\partial z}{\partial y'} ,$$

$$t = \lambda_{yy} \frac{\partial z}{\partial x'} + \mu_{yy} \frac{\partial z}{\partial y'} + \lambda_y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x'^2} + 2\lambda_y \mu_y \frac{\partial^2 z}{\partial x' \partial y'} + \mu_y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y'^2} .$$

L'équation (3) devient

$$\lambda_y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x'^2} + 2\lambda_y \mu_y \frac{\partial^2 z}{\partial x' \partial y'} + \mu_y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y'^2} + \lambda_{yy} \frac{\partial z}{\partial x'} + \mu_{yy} \frac{\partial z}{\partial y'} + $$
$$+ f\lambda_x \frac{\partial z}{\partial x'} + f\mu_x \frac{\partial z}{\partial y'} = 0 .$$

On veut que cette équation ait la forme:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y'^2} + X_1 \frac{\partial z}{\partial x'} = 0 ,$$

où X_1 ne dépendra que de x' seul.

Ceci exige d'abord que λ_y soit nul, ce qui entraîne la disparation des premier, deuxième, quatrième termes du premier membre; λ sera donc fonction de x seul, et en particulier on pourra conserver la variable x.

L'équation s'écrit maintenant

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y'^2} + \frac{1}{\mu_y^2} (\mu_{yy} + f\mu_x) \frac{\partial z}{\partial y'} + \frac{\lambda_x}{\mu_y^2} f \frac{\partial z}{\partial x'} = 0 :$$

On fera disparaître le terme en $\frac{\partial z}{\partial y'}$ en prenant pour $\mu(x, y)$ une solution de l'équation (3). Il faudra ensuite que $\frac{\lambda_x}{\mu_y^2} f$ soit fonction de la seule variable x, ce qui se traduit par

$$\frac{f}{\mu_y^2} = \frac{1}{4 X^2} , \tag{5}$$

en désignant par X une fonction quelconque de x, ou

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{\mu_y^2}\right) = 0 ,$$

ou encore

$$f_y \mu_y - 2 f \mu_{yy} = 0 . \tag{5'}$$

La fonction $y' = \mu(x, y)$ doit donc vérifier les équations (3) et (5'). En tenant compte de (3), (5') s'écrit

$$f_y \mu_y + 2 f^2 \mu_x = 0 . \tag{6}$$

3. — *On pourra ramener l'équation* (3)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + f(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

à la forme de l'équation classique de la chaleur chaque fois qu'on pourra trouver une intégrale y′ $= \mu(x, y)$ *de l'équation du premier ordre* (6) *qui soit en même temps intégrale de l'équation* (3). *Le changement de variable* y′ $= \mu$ (x, y) *ramène l'équation* (3) *à une équation de même forme ou le coefficient de* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *est fonction de* x *seul. On procède ensuite comme au paragraphe 1.*

4. — De la considération simultanée des deux équations:

$$\mu_{yy} + f\mu_x = 0 \ , \quad \frac{f}{\mu_y^2} = \frac{1}{4\,X^2} \ ,$$

nous allons déduire une conséquence intéressante. La seconde donne

$$\mu_y = 2\,X f^{\frac{1}{2}} \ .$$

L'autre conduit à

$$\mu_x = -\,X f^{-\frac{3}{2}} f_y \ .$$

On obtiendra donc la fonction μ par l'équation aux différentielles totales

$$d\mu = (-\,X f^{-\frac{3}{2}} f_y)\,dx + (2\,X f^{\frac{1}{2}})\,dy \ . \tag{7}$$

Ecrivons que la condition d'intégrabilité est vérifiée, soit

$$X\frac{\partial}{\partial y}(f^{-\frac{3}{2}} f_y) + 2\frac{\partial}{\partial x}\left(X f^{\frac{1}{2}}\right) = 0 \ , \tag{8}$$

ou encore:

$$\frac{2ff_{yy} + 2f^2 f_x - 3f_y^2}{f^3} = \frac{2\,X'}{X} = \text{fonct. de } x \text{ seul} \ . \tag{8'}$$

En résumé pour que l'équation (3) *puisse être ramenée à l'équation de la chaleur, il faut que la fonction* f (x, y) *soit telle que l'expression*

$$\frac{2ff_{yy} + 2f^2 f_x - 3f_y^2}{f^3}$$

ne dépende que de la seule variable x.

La condition précédente peut être mise sous une forme plus remarquable si l'on observe, comme le montre un calcul facile, que la condition d'intégrabilité (8) peut être mise sous la forme

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\mathrm{X}f^{-\frac{1}{2}}\right) + f\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{X}f^{-\frac{1}{2}}\right) = 0 \,. \tag{9}$$

D'où l'énoncé suivant:

On saura ramener l'équation (3) *à l'équation de la chaleur chaque fois qu'on connaîtra une fonction* X *de* x *telle que* $\mathrm{X}f^{-\frac{1}{2}}$ *soit solution de l'équation* (3).

II. — Applications.

5. — Première application. — *Comment faut-il choisir les fonctions* X *et* X_1 *de* x *pour que l'équation*

$$t + \frac{\mathrm{X}}{(\mathrm{X}y + \mathrm{X}_1)^2} p = 0 \tag{10}$$

soit réductible à l'équation t = p *par un changement de variables ?*

L'équation (6) s'écrit ici:

$$p - (\mathrm{X}y + \mathrm{X}_1) q = 0 \,.$$

Pour obtenir l'intégrale de cette équation on est amené à considérer l'équation différentielle linéaire

$$\frac{dy}{dx} + \mathrm{X}y + \mathrm{X}_1 = 0$$