trisection de l'angle.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **33 (1934)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Les autres, au contraire, *comportant un certain tâtonnement* dans la mise en place d'une des lignes qui y interviennent (tâtonnement, d'ailleurs, d'une réalisation toujours rapide et que peut faciliter l'emploi d'une courbe d'erreur), aboutiraient, si leur exécution était affranchie de toute erreur, au résultat théoriquement exact. Je dis de celles-ci qu'elles sont *anormales*.

2. — Il va sans dire que s'il s'agit d'un problème d'ordre transcendant, il ne peut être question que de constructions normales. C'est le cas, par exemple, pour la quadrature du cercle, ou, plus généralement, pour la rectification d'un arc de cercle quelconque. On voudra bien, à cette occasion, me permettre de rappeler que j'ai fait connaître [1] de ce dernier problème une solution normale, d'une extrême simplicité, fournissant en pratique toute la précision que l'on peut désirer.

Pour les problèmes d'ordre algébrique, on a le choix entre des solutions normales et des solutions anormales; c'est notamment le cas du problème de la trisection de l'angle, auquel va être consacrée cette étude.

La trisection de l'angle.

3. — Il convient de remarquer tout d'abord que l'on peut se borner au seul cas des angles aigus, attendu que, s'il s'agit d'un angle obtus, il suffit, pour en avoir le tiers, de retrancher le tiers de l'angle aigu supplémentaire de l'angle de 60° dont la construction est rigoureuse.

La plupart des solutions proposées pour le problème de la trisection sont du type anormal, à commencer par celle, dite de Nicomède, la plus classique, qui peut s'énoncer ainsi: *si un cercle, de rayon* r *quelconque, ayant pour centre le sommet* O *de l'angle* AOB *à trisecter, coupe les côtés de cet angle en* A *et* B [2], *la droite issue de* B *qui coupe le cercle en* C *et la droite* OA *en* D, *de*

---

[1] *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 4^me^ série, t. VII, p. 1; 1907. Voici cette construction: si le point C de la corde AB est tel que $AC = \frac{2}{3} AB$ et que le rayon OC coupe l'arc AB en D, on a très sensiblement corde $AD = \frac{2}{3}$ arc AB.

[2] Le lecteur est prié de faire la figure.

telle sorte que CD $= r$, *est parallèle à la trisectrice cherchée.* En effet, les triangles OBC et COD étant isocèles, on a les égalités d'angles AOB $=$ OBD $+$ ODB, et OBD $=$ OCB $=$ 2ODB, d'où AOB $=$ 3ODB.

J'ai, pour ma part, fait connaître[1] une propriété fort simple se traduisant par une autre construction anormale: *si la trisectrice issue de* O *coupe en* E *la corde* AB *du cercle et en* F *le cercle de centre* A *et de rayon* AO, *on a* EF $=$ OA. En effet, si l'on pose AOB $= \omega$, les angles AOF et AFO sont égaux à $\frac{\omega}{3}$, OAB et OBA à $\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}$, on en déduit que OAF $= \pi - \frac{2\omega}{3}$, puis que EAF $=$ OAF $-$ OAB $= \frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{2} - \frac{2\omega}{3}$ et que AEF $= \pi$ $-$ EOB $-$ OBA $= \frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{2} - \frac{2\omega}{3}$; donc EAF $=$ AEF; par suite, le triangle FAE est isocèle et EF $=$ AF $= r$.

Mais les solutions les plus intéressantes, au point de vue du tracé, sont les solutions normales; nous allons en examiner ici quelques-unes particulièrement dignes de remarque.

4. — Rappelons tout d'abord qu'il n'est ici question que d'angles ω compris entre 0 et 90°. Toute construction normale appliquée à un tel angle fournit un angle θ présentant par rapport à $\frac{\omega}{3}$ un certain écart ε, d'ailleurs supposé négligeable, mais qui peut se déterminer mathématiquement et dont la considération conduit à une nouvelle distinction à observer parmi ces solutions normales: suivant que, pour ω variant de 0 à 90°, ε croît constamment à partir de 0 jusqu'à une certaine valeur $\mathcal{E}$, ou s'annule pour $\omega = 0$ et $\omega = 90°$, en présentant un maximum dans l'intervalle, la solution est dite à *écart ouvert jusqu'à* $\mathcal{E}$, ou à *écart fermé.* Notre attention va d'abord se porter sur deux solutions à écart fermé, puis sur une troisième à écart ouvert.

Première solution normale (a écart fermé).

5. — Marquons sur l'axe Ox les points O″, O′ et A tels qu'en suivant le sens positif on ait O″O′ $=$ O′O $=$ OA $= 1$, les

[1] *Revue générale des sciences*, t. XLIV, p. 625; 1933.