Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 33 (1934)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉTUDE RATIONNELLE DU PROBLÈME DE LA TRISECTION DE L'ANGLE

Autor: d'Ocagne

Kapitel: PREMIERE SOLUTION NORMALE (A ÉCART FERMÉ).

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-25987

telle sorte que CD $= r$, *est parallèle à la trisectrice cherchée.* En effet, les triangles OBC et COD étant isocèles, on a les égalités d'angles AOB $=$ OBD $+$ ODB, et OBD $=$ OCB $=$ 2ODB, d'où AOB $=$ 3ODB.

J'ai, pour ma part, fait connaître[1] une propriété fort simple se traduisant par une autre construction anormale: *si la trisectrice issue de* O *coupe en* E *la corde* AB *du cercle et en* F *le cercle de centre* A *et de rayon* AO, *on a* EF $=$ OA. En effet, si l'on pose AOB $= \omega$, les angles AOF et AFO sont égaux à $\frac{\omega}{3}$, OAB et OBA à $\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}$, on en déduit que OAF $= \pi - \frac{2\omega}{3}$, puis que EAF $=$ OAF $-$ OAB $= \frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{2} - \frac{2\omega}{3}$ et que AEF $= \pi$ $-$ EOB $-$ OBA $= \frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{2} - \frac{2\omega}{3}$; donc EAF $=$ AEF; par suite, le triangle FAE est isocèle et EF $=$ AF $= r$.

Mais les solutions les plus intéressantes, au point de vue du tracé, sont les solutions normales; nous allons en examiner ici quelques-unes particulièrement dignes de remarque.

4. — Rappelons tout d'abord qu'il n'est ici question que d'angles ω compris entre 0 et 90°. Toute construction normale appliquée à un tel angle fournit un angle θ présentant par rapport à $\frac{\omega}{3}$ un certain écart ε, d'ailleurs supposé négligeable, mais qui peut se déterminer mathématiquement et dont la considération conduit à une nouvelle distinction à observer parmi ces solutions normales: suivant que, pour ω variant de 0 à 90°, ε croît constamment à partir de 0 jusqu'à une certaine valeur $\mathcal{E}$, ou s'annule pour $\omega = 0$ et $\omega = 90°$, en présentant un maximum dans l'intervalle, la solution est dite à *écart ouvert jusqu'à* $\mathcal{E}$, ou à *écart fermé.* Notre attention va d'abord se porter sur deux solutions à écart fermé, puis sur une troisième à écart ouvert.

Première solution normale (a écart fermé).

5. — Marquons sur l'axe Ox les points O$''$, O$'$ et A tels qu'en suivant le sens positif on ait O$''$O$'$ $=$ O$'$O $=$ OA $= 1$, les

[1] *Revue générale des sciences*, t. XLIV, p. 625; 1933.

perpendiculaires à Ox menées par ces points étant dénotées $O''y$, $O'y$, Oy, Ay (comme si y désignait le point à l'∞ dans la direction perpendiculaire à Ox), et menons par les points O, O′, O″ les droites OB, O′B, $O''B_1$ B_2 (qui coupe OB en B_1 et O′B en B_2)[1] faisant respectivement avec Ox les angles ω, $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega}{3}$.

Le lieu du point B est, bien entendu, le cercle Γ de centre O, de diamètre O′A. Cherchons le lieu du point B_1.

Si nous plaçons l'origine en O″, les droites OB_1 et $O''B_1$ ont respectivement pour équations

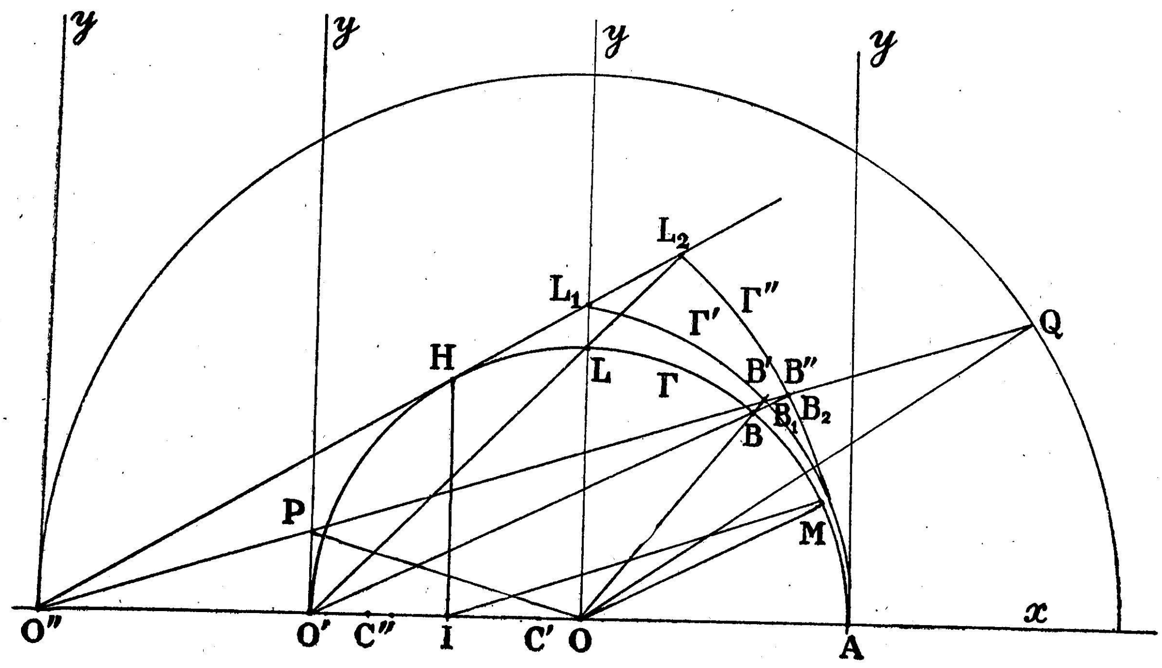
$$y = (x - 2) \operatorname{tg} \omega \qquad \text{et} \qquad y = x \operatorname{tg} \frac{\omega}{3} .$$

Comme on sait que

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{3 \operatorname{tg} \frac{\omega}{3} - \operatorname{tg}^3 \frac{\omega}{3}}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{3}} ,$$

il en résulte, par élimination de ω, pour le lieu cherché, l'équation

$$x(x^2 + y^2) - 3x^2 + y^2 = 0 , \qquad (1)$$



[1] Les points B_1 et B_2 dont il est ici question se confondent, à un écart tout à fait insensible près, avec les points désignés sur la figure par B′ et B″, qui seront définis plus loin.

cubique circulaire Γ_1 bien connue, dite *trisectrice de Maclaurin*. Symétrique par rapport à Ox, elle se compose d'une boucle tangente en A à Ay, ayant en O'' un point double où les tangentes sont inclinées à 60° sur Ox, et se prolongeant au-delà par deux branches infinies ayant pour asymptote commune la droite symétrique de $O'y$ par rapport à O''.

6. — Avant d'aller plus loin faisons voir très simplement que cette cubique Γ_1 est une *cissoïdale*, ce terme désignant une courbe dont, pour un certain pôle, le vecteur est la somme algébrique des vecteurs d'une droite et d'un cercle, ou la différence algébrique de ces vecteurs (ce cas se ramenant immédiatement au précédent si l'on prend la symétrique par rapport au pôle, soit de la droite, soit du cercle intervenant dans la définition).

Pour démontrer la propriété en question, il suffit de remarquer que, puisque par définition $B_1OA = 3B_1O''A$, on a $O''B_1O = 2B_1O''A$. Mais si $O''B_1$ coupe $O'y$ en P, le triangle POO'' étant isocèle, on a aussi $OPB_1 = 2B_1O''A$, d'où résulte que le triangle OPB_1 est isocèle comme ayant ses angles à la base égaux. Si maintenant $O''B_1$ coupe en Q le cercle de centre O et de rayon OO'', le triangle $OO''Q$ est également isocèle; il s'ensuit que $O''P = B_1Q$ et que $O''B_1 = O''Q - O''P$, ce qui montre que *la cubique* Γ_1 *est une cissoïdale pour la droite* $O'y$ *et le cercle de centre* O *et de rayon* OO''.

7. — Mais, puisque nous nous bornons aux seuls angles inférieurs à 90°, nous n'avons à considérer que l'arc de Γ_1 allant du point A au point L_1 où Oy est coupé par la droite issue de O'' inclinée à 30° sur $O''x$, qui n'est autre que la tangente $O''H$ au cercle Γ.

Si on effectue (notamment par le procédé résultant de la dernière propriété indiquée) le tracé de cet arc AL_1, on ne peut manquer d'être frappé de son analogie d'aspect avec un arc de cercle, ce qui conduit à comparer cet arc de la cubique Γ_1 avec l'arc de cercle Γ' qui, partant du point A tangentiellement à Ay, aboutit au point L_1.

Si l'on prend encore O'' comme origine des coordonnées, on a, pour le point A, $x = 3$, $y = 0$, pour le point L_1, $x = 2$, $y = \frac{2}{\sqrt{3}}$, et, si on appelle α l'abscisse du centre C' de Γ', l'équation de ce cercle s'écrit

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x + 6\alpha - 9 = 0 . \tag{2}$$

Il suffit d'exprimer que cette équation est satisfaite par les coordonnées de L_1 pour en tirer $\alpha = \frac{11}{6}$, ce qui donne pour le rayon du cercle

$$r = 3 - \alpha = \frac{7}{6} , \tag{3}$$

d'où résulte que

$$C'O = \frac{O'O}{6} .$$[1]

Finalement, le cercle Γ' a pour équation

$$3x^2 + 3y^2 - 11x + 6 = 0 . \tag{4}$$

Si l'on représente par f le premier membre de cette équation, la pente de la tangente en tout point de Γ' est donnée par

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{6x - 11}{6y} .$$

Elle prend, au point L_1, la valeur

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{3}}{12} . \tag{5}$$

Comparons aux valeurs (4) et (5) de r et $\frac{dy}{dx}$, celles des mêmes éléments (r désignant alors le rayon de courbure) pour la cubique Γ_1 aux mêmes points A et L_1.

L'équation (1) de cette cubique donne

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y^2 - 6x , \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y(x + 1) , \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2(x + 1) ,$$

et comme, en A, $x = 3$, $y = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, il vient, pour la valeur

---

[1] Il est clair, puisque le segment $O'O$ pris comme unité de longueur est arbitraire, que l'on pourra prendre pour sa mesure un nombre de millimètres multiple de 6, par exemple 30 mm., ce qui donnera $C'O = 5$ mm.

absolue de r en ce point,

$$r = \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{9}{8} . \tag{6}$$

Quant à la pente en L_1, elle est donnée par

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 + y^2 - 6x}{2y(x+1)} = -\frac{\sqrt{3}}{9} . \tag{7}$$

La différence des r, évalués en (3) et (6), est donc égale à $\frac{7}{6} - \frac{9}{8}$, ou $\frac{2}{48} = 0{,}041$; celle des pentes, évaluées en (5) et (7), à $-\frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{9}$ ou $\frac{\sqrt{3}}{36} = 0{,}048$. Si petites sont ces différences que l'on peut en conclure que, de A en L_1, l'arc du cercle Γ', partout extérieur à l'arc de la cubique Γ_1, est tout près de se confondre avec lui. On pourra donc, sans grande erreur, substituer le premier au second, et, au lieu de prendre le point de rencontre B_1 de OB et de Γ_1, prendre celui B' de OB et de Γ', pour le joindre à O'' en vue de déterminer la direction de la trisectrice cherchée.

8. — Pour mieux se rendre compte du degré de précision ainsi obtenu, on peut calculer la valeur exacte de l'angle $B'O''A = \theta$, ainsi construit, et la comparer à celle de $\frac{\omega}{3}$. Si l'on pose $\operatorname{tg} \omega = t$, l'équation de OB, toujours avec l'origine en O'', est

$$y = t(x-2) . \tag{8}$$

Remplaçant y par cette valeur dans l'équation (4) de Γ', on a

$$3(1+t^2)x^2 - (12t^2 + 11)x + 12t^2 + 6 = 0 .$$

Le point B' étant celui des points de rencontre de OB et de Γ' qui a la plus grande abscisse, il faut, dans l'expression tirée de là pour x, prendre le radical avec le signe $+$, ce qui donne

$$x = \frac{12t^2 + 11 + \sqrt{48t^2 + 49}}{6(1+t^2)} . \tag{9}$$

Remarquons en passant que, si l'on pose $6(1+t^2) = u$, on peut mettre cette formule sous la forme plus simple

$$x = \frac{2u - 1 + \sqrt{8u+1}}{u} . \qquad (9\ bis)$$

Ayant calculé x et y par (9) et (8), on en tire

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} ,$$

et, par suite, θ.

Faisons ce calcul pour $\omega = 45°$, valeur moyenne entre les limites 0 et 90°. Ici, $t = 1$, et l'on trouve

$$x = 2{,}737 , \qquad y = 0{,}737 ,$$

d'où

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{0{,}737}{2{,}737} \qquad \text{et} \qquad \theta = 15° 4' 15'' .$$

Par suite,

$$\varepsilon = \theta - \frac{\omega}{3} = 4' 15'' .$$

Cet écart est inférieur à $6'$, le dixième de degré, que l'on peut regarder comme l'extrême limite de la précision qui puisse être atteinte dans le dessin, qui même, sans doute, ne l'est effectivement jamais; on est donc en droit de le tenir pour strictement négligeable. Ainsi se trouve justifiée la construction normale, non encore proposée, semble-t-il, qui peut s'énoncer ainsi:

Si $OC' = \frac{AO}{6}$ *et* $OO'' = 2AO$, *et que l'on trace le cercle* Γ' *de centre* C' *et de rayon* C'A, *la droite joignant* O'' *au point de rencontre* B' *de* OB *et de* Γ' *est parallèle à la trisectrice de l'angle* AOB.

Deuxième solution normale (a écart fermé).

9. — Cherchons maintenant le lieu du point B_2 d'intersection des droites $O'B$ et $O''B_1$, respectivement inclinées à $\frac{\omega}{2}$ et $\frac{\omega}{3}$ sur Ox, dont les équations sont

$$y = (x - 1) \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \qquad \text{et} \qquad y = x \operatorname{tg} \frac{\omega}{3} .$$