Deuxième solution normale (a écart fermé).

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **33 (1934)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Remarquons en passant que, si l'on pose $6(1+t^2) = u$, on peut mettre cette formule sous la forme plus simple

$$x = \frac{2u - 1 + \sqrt{8u+1}}{u} . \tag{9 bis}$$

Ayant calculé x et y par (9) et (8), on en tire

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} ,$$

et, par suite, θ.

Faisons ce calcul pour $\omega = 45°$, valeur moyenne entre les limites 0 et 90°. Ici, $t = 1$, et l'on trouve

$$x = 2{,}737 , \qquad y = 0{,}737 ,$$

d'où

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{0{,}737}{2{,}737} \qquad \text{et} \qquad \theta = 15° 4' 15'' .$$

Par suite,

$$\varepsilon = \theta - \frac{\omega}{3} = 4' 15'' .$$

Cet écart est inférieur à 6′, le dixième de degré, que l'on peut regarder comme l'extrême limite de la précision qui puisse être atteinte dans le dessin, qui même, sans doute, ne l'est effectivement jamais; on est donc en droit de le tenir pour strictement négligeable. Ainsi se trouve justifiée la construction normale, non encore proposée, semble-t-il, qui peut s'énoncer ainsi:

Si $\mathrm{OC}' = \frac{\mathrm{AO}}{6}$ *et* $\mathrm{OO}'' = 2\mathrm{AO}$, *et que l'on trace le cercle* Γ' *de centre* C′ *et de rayon* C′A, *la droite joignant* O″ *au point de rencontre* B′ *de* OB *et de* Γ' *est parallèle à la trisectrice de l'angle* AOB.

Deuxième solution normale (a écart fermé).

9. — Cherchons maintenant le lieu du point B_2 d'intersection des droites O′B et $\mathrm{O}''\mathrm{B}_1$, respectivement inclinées à $\frac{\omega}{2}$ et $\frac{\omega}{3}$ sur Ox, dont les équations sont

$$y = (x-1) \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \qquad \text{et} \qquad y = x \operatorname{tg} \frac{\omega}{3} .$$

En égalant deux expressions de tg ω, on a, d'autre part,

$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2}} = \frac{3 \operatorname{tg} \frac{\omega}{3} - \operatorname{tg}^3 \frac{\omega}{3}}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{3}} .$$

L'élimination de ω entre ces trois équations donne, pour le lieu cherché, l'équation

$$(x^2 + y^2 - 2x)^2 - (x^2 + y^2) = 0 . \tag{10}$$

Elle définit un limaçon de Pascal[1] Γ_2, symétrique par rapport à Ox qu'il coupe aux points O$''(x = 0)$, O$'(x = 1)$ et A$(x = 3)$. En O$'$ et A les tangentes sont O$'y$ et Ay; en O$''$, point double, les tangentes sont, comme pour la cubique Γ_1 du n° 5, inclinées à 60° sur O$''x$. Ce limaçon coupe, en outre, O$''y$ aux points $y = \pm 1$. On sait d'ailleurs qu'il constitue la podaire du cercle de diamètre O$''$A pour le point O$''$.

10. — Mais, comme dans le cas de la cubique Γ_1, nous n'avons à nous occuper que de l'arc de cette quartique Γ_2 allant du point A au point L_2 correspondant à $\omega = 90°$, donné par l'intersection de la droite O$'$ L, à 45° sur Ox, et de la droite O$''$ H, à 30° sur Ox, qui n'est autre que la tangente menée de O$''$ au cercle Γ.

Ces deux droites ont respectivement pour équations

$$y = x - 1 \qquad \text{et} \qquad y = \frac{x}{\sqrt{3}} ,$$

d'où l'on tire, pour les coordonnées de L_2, les valeurs

$$x = k\sqrt{3} , \qquad y = k \qquad \text{avec} \qquad k = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} .$$

Remarquons en passant qu'il résulte de là que

$$\overline{\mathrm{O}''\mathrm{L}_2}^2 = x^2 + y^2 = 4k^2 = (1 + \sqrt{3})^2 ,$$

[1] Du nom de son premier inventeur, non pas Blaise Pascal mais son père Etienne qui a fondé lui-même sur l'emploi de cette courbe un procédé de trisection de l'angle, attendu que, l'angle $x\mathrm{O}''\mathrm{B}_1$ étant égal aux $\frac{2}{3}$ de $x\mathrm{O}'\mathrm{B}_1$, on a $\mathrm{O}'\mathrm{B}_1\mathrm{O}'' = \frac{x\mathrm{O}'\mathrm{B}_1}{3}$.

c'est-à-dire que $O'' L_2 = 1 + \sqrt{3}$, et, puisque $O'' H = \sqrt{3}$,

$$HL_2 = 1 .$$

Ici encore, on est conduit à comparer à l'arc de quartique Γ_2 allant de A en L_2, l'arc du cercle Γ'' tangent en A à Ay et aboutissant en L_2.

L'équation de ce cercle étant encore de la forme (2) du nº 7, il suffit d'écrire qu'elle est satisfaite par les coordonnées ci-dessus du point L_2 pour en tirer

$$\alpha = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} .$$

Or, $\frac{3}{2}$ est l'abscisse du milieu I de OO′, projection de H sur cette droite, et $\frac{\sqrt{3}}{6}$ la longueur de $\frac{IH}{3}$. On voit donc que le centre C'' de ce cercle Γ'' est tel que

$$C''I = \frac{IH}{3} .$$

Quant à son rayon $C''A$, ou r, il est donné par

$$r = C''I + IA = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{3}{2} . \tag{11}$$

L'équation du cercle Γ'' peut dès lors s'écrire

$$3(x^2 + y^2) - (9 - \sqrt{3})x - 3\sqrt{3} = 0 . \tag{12}$$

La pente de la tangente en chacun de ses points est donnée par

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{6x - (9 - \sqrt{3})}{6y} .$$

Elle prend au point L_2 la valeur

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{2}{3}(3 - \sqrt{3}) . \tag{13}$$

Cherchons maintenant les mêmes éléments (r en A, $\frac{dy}{dx}$ en L_2) pour la quartique Γ_2. De l'équation (10) on déduit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 4xy^2 - 12x^2 - 4y^2 + 6x \ ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 4x^2y - 8xy - 2y \ ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 + 4x^2 - 8x - 2 \ .$$

En A, où $x = 3$, $y = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, la valeur absolue du rayon de courbure r est donnée par

$$r = \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{9}{5} \ . \tag{14}$$

Quant à la pente en L_2, elle résulte de

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{8\sqrt{3}\,k^2 - 20k + 3\sqrt{3}}{8k^2 - 4\sqrt{3}\,k - 1} \ ,$$

avec $k = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$, et donc $k^2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$. Cette substitution donne

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2 + \sqrt{3}}{1 + 2\sqrt{3}} = -\frac{4 + 3\sqrt{3}}{11} \ . \tag{15}$$

La différence des rayons r de Γ'' et Γ_2 en A, donnés par (11) et (14), a pour valeur

$$\frac{9}{5} - \frac{9 + \sqrt{3}}{6} = 0{,}014 \ ;$$

celle des pentes, données par (13) et (15),

$$-\frac{4 + 3\sqrt{3}}{11} + \frac{6 - 2\sqrt{3}}{3} = \frac{54 - 31\sqrt{3}}{33} = 0{,}0093 \ .$$

Ces différences étant sensiblement moindres que celles obtenues dans le cas de la cubique Γ_1 font immédiatement apparaître que la substitution du cercle Γ'' à la cubique Γ_2, de A à L_2, comportera une plus grande approximation que celle du cercle Γ'

à la cubique Γ_1. En réalité même, cette approximation est surprenante, comme on va voir.

11. — C'est sur cet emploi du cercle Γ'', au lieu de la quartique Γ_2, que repose la très remarquable solution du problème de la trisection due à M. Kopf et à laquelle M. Oscar Perron a consacré récemment une étude approfondie[1], dérivant, au reste, d'une tout autre méthode que celle qui est ici suivie.

Pour évaluer le degré de précision donné par cette solution, on peut procéder comme dans le cas du cercle Γ' (nº 8), c'est-à-dire, en prenant le point de rencontre B'' de $O'B$ avec le cercle Γ'', calculer l'angle $B''O''A$, désigné par θ, pour voir de combien il diffère de $\frac{\omega}{3}$.

Si l'on pose ici $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = t$, on a pour l'équation de la droite $O'B$

$$y = t(x - 1) \ . \qquad (16)$$

Remplaçant y par cette valeur dans l'équation (12) du cercle Γ'', on obtient l'équation

$$3(1 + t^2)x^2 - (6t^2 + 9 - \sqrt{3})x + 3(t^2 - \sqrt{3}) = 0 \ ,$$

dont la plus grande racine est l'abscisse du point B''. Elle a pour valeur

$$x = \frac{6t^2 + 9 - \sqrt{3} + \sqrt{24(3 + \sqrt{3})t^2 + 6(14 + 3\sqrt{3})}}{6(1 + t^2)} \qquad (17)$$

qui, si l'on pose, comme au nº 8, $6(1 + t^2) = u$, prend la forme

$$x = \frac{u + 3 - \sqrt{3} + \sqrt{4(3 + \sqrt{3})u + 6(2 - \sqrt{3})}}{u} \ . \qquad (17\ bis)$$

x et y étant calculés au moyen de (16) et (17), on a θ par $\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$, puis $\varepsilon = \theta - \frac{\omega}{3}$. Mais, par de laborieux calculs, autrement et d'ailleurs habilement conduits, M. Perron a dressé

[1] *Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften* (1933, p. 439). Cette note renvoie à celle de M. Kopf (*Ibid.*, 1919, p. 341).

le tableau des valeurs de ε pour ω variant de 12 en 12°, de 0 à 90°. Voici ce tableau:

ω		ε	ω		ε	ω		ε
0°	. . .	0	36°	. . .	4″,23	72°	. . .	14″,76
12°	. . .	0″,18	48°	. . .	8″,58	84°	. . .	8″,47
24°	. . .	1″,38	60°	. . .	13″,08	90°	. . .	0

Au surplus le maximum de ε, qui a lieu pour $\omega = 69°\,57'\,40''$, a pour valeur 14″,912.

Cette étonnante précision montre que la solution de M. Kopf est incontestablement celle qui serre de plus près la solution rigoureuse non réalisable, au point même que, non en théorie sans doute, mais en fait, elle peut en être prise pour l'équivalent.

Redisons en quoi elle consiste: I *étant le milieu de* OO′ *et* IC″ *égal à* $\frac{\mathrm{IH}}{3}$, *si la droite* O′ B *coupe en* B″ *le cercle de centre* C″ *et de rayon* C″ A, *la droite* O″ B″ *est, sans aucune erreur appréciable, parallèle à la trisectrice de l'angle* AOB.

Mais, quel que soit le très grand intérêt théorique de cette curieuse solution normale, on peut en imaginer d'autres plus simples qui, sans aboutir à d'aussi minimes écarts, n'en comportent pourtant que de pratiquement négligeables. A ce point de vue, la solution suivante semble mériter une mention spéciale.

Troisième solution normale (a écart ouvert).

12. — Rappelons tout d'abord qu'une solution normale est à écart ouvert si l'écart ε entre l'angle θ construit et $\frac{\omega}{3}$ croît constamment avec ω variant de 0 à 90°. Si la valeur atteinte par ε pour $\omega = 90°$ est acceptable, la solution est entièrement valable. Sans qu'il en soit ainsi, ε peut atteindre une limite acceptable pour une valeur λ de ω comprise entre 45 et 90°; si d'ailleurs il n'en était pas ainsi, la solution serait à rejeter. Supposons donc que λ satisfasse à la condition requise; alors, lorsque ω est supérieur à λ, il suffit de trisecter le complément de ω, qui est, lui, inférieur à λ, et de retrancher le tiers obtenu de l'angle de 30°, construit rigoureusement.