SUR LE TRANCHET D'ARCHIMÈDE

Autor(en): **d'Ocagne**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **33 (1934)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-25989

SUR LE TRANCHET D'ARCHIMÈDE

PAR

M. D'OCAGNE, Membre de l'Institut (Paris).

Voici un exemple particulièrement typique, me semble-t-il, des avantages qu'en tant que moyen de démonstration, peut offrir la méthode de l'inversion, ou des rayons vecteurs réciproques.

1. — Soient A, B, C trois points marqués sur une droite (A entre B et C). D'un même côté de cette droite traçons les demi-cercles de diamètres BC, AC et AB; ils forment un triangle curviligne ABC qui a reçu le nom de *tranchet* (αρβηλος) *d'Archimède*. Si A_0, B_0, C_0 sont les centres de ces cercles, traçons aussi les cercles de diamètres BB_0 et CC_0; ils se coupent sur la tangente commune AT aux cercles de diamètres AB et AC; si, en effet, on appelle P le point où l'un ou l'autre de ces deux cercles coupe la droite AT, on obtient dans les deux cas

$$AP^2 = 2bc ,$$

lorsqu'on représente par a, b, c les rayons des demi-cercles de diamètres BC, AC et AB, rayons tels, d'ailleurs, que

$$a = b + c. \qquad (1)$$

Remarquons en passant que l'aire du tranchet est donnée par

$$\frac{\pi}{2}(a^2 - b^2 - c^2) = \frac{\pi}{2}[(b + c)^2 - b^2 - c^2)] = \pi bc .$$

Elle est donc *double de celle du cercle de diamètre* AP.

2. — U et V étant les points de rencontre des demi-cercles de diamètre BB_0 et CC_0 respectivement avec les demi-cercles AC et AB du tranchet, chacune des transversales constituées par la droite AT et par les arcs de cercle BU et CV divise le tranchet en deux segments, et l'on a ces curieuses propriétés: *dans chacun de ces trois couples de segments, les rayons des cercles inscrits sont égaux.*

Cette propriété est depuis longtemps connue en ce qui concerne les segments formés par la droite AT. Peut-être n'a-t-elle pas encore été remarquée en ce qui concerne ceux formés respectivement par les arcs BU et CV. C'est par l'inversion que nous allons démontrer l'une et l'autre de ces propositions; elle permet d'éviter des calculs assez laborieux.

3. — Etablissons d'abord un lemme. Si r et r' sont les rayons de deux cercles inverses l'un de l'autre par rapport au pôle O; T et T′, les points de contact de ces cercles avec une de leurs tangentes communes issues de O, on a

$$\frac{r'}{r} = \frac{OT'}{OT} = \frac{OT \cdot OT'}{OT^2},$$

ou, si $\mathcal{I}$ désigne la puissance d'inversion et $\mathcal{C}$ la puissance du point O par rapport au cercle de rayon r,

$$\frac{r'}{r} = \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{C}}. \qquad (2)$$

4. — En prenant A comme pôle d'inversion avec une puissance égale au produit AB . AC, c'est-à-dire, en valeur absolue,

$$\mathcal{I} = 4\,bc \qquad (3)$$

avec des rayons vecteurs réciproques directement opposés, on est ramené, pour trouver les rayons des cercles inscrits, à résoudre des problèmes bien plus faciles que ceux qui se présentent dans la détermination directe.

Dans une telle inversion, la droite AT et le cercle de diamètre BC se conservent, toutefois avec échange pour chacun d'eux de la partie située en-dessus et de la partie située en-dessous de la droite BC. Les cercles de diamètres AC et AB ont pour inverses respectivement les perpendiculaires à la droite BC en B et en C. Pour le cercle BB_0, les points B et C étant correspondants l'un de l'autre, on obtient comme inverse un cercle de diamètre CD dont le rayon B_1C est donné, en vertu de (2) et (3), par

$$B_1C = \frac{4bc}{2bc}\left(c + \frac{b}{2}\right) = 2c + b = a + c .$$

5. — Déterminons d'abord le rayon du cercle inscrit dans le segment ABT. Il a pour inverse, d'après ce qui vient d'être dit, le cercle, de centre I, tangent à la fois à AT, au cercle BC et à la tangente à celui-ci en C. Le rayon de ce cercle inverse est donc égal à b, et, d'après la formule (2), si $\mathcal{C}$ représente ici la puissance du pôle A par rapport à ce cercle de centre I, le rayon α du cercle inscrit cherché est donné, compte tenu de (3), par

$$\alpha = \frac{4b^2c}{\mathcal{C}} .$$

Or, ici,

$$\mathcal{C} = AH^2 = B_0I^2 = A_0I^2 - A_0B_0^2 .$$

Mais

$$A_0I = a + b , \qquad A_0B_0 = BB_0 - A_0B = b + 2c - a = a - b .$$

Donc

$$\mathcal{C} = (a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

et

$$\alpha = \frac{bc}{a} . \tag{4}$$

Si, au lieu du cercle inscrit dans ABT, on considère celui inscrit dans ACT, il suffit d'intervertir les rôles des cercles AC et BC, c'est-à-dire de permuter b et c. La valeur de α reste donc la même et la première proposition — la proposition, depuis longtemps classique, comme nous l'avons déjà dit — est établie.

6. — Cherchons maintenant le rayon du cercle inscrit dans le segment ABU, cercle dont l'inverse, d'après ce qui a été vu au n° 4, est le cercle de centre J tangent à la fois aux per-

pendiculaires élevées en B et en C à BC, ainsi qu'au cercle CD dont le rayon B_1C est égal à $a + c$. Le rayon de ce cercle (J) est égal à a; par suite, en vertu des formules (2) et (3), $\mathcal{C}$ étant cette fois la puissance du pôle A par rapport au cercle de centre J, le rayon β du cercle inscrit cherché est donné par

$$\beta = \frac{4abc}{\mathcal{C}} .$$

Or, ici,

$$\mathcal{C} = AJ^2 - a^2 ,$$

et

$$AJ^2 = A_0J^2 + AA_0^2 = B_1J^2 - A_0B_1^2 + AA_0^2 .$$

On a d'ailleurs immédiatement

$$\begin{aligned} B_1J &= B_1F + FJ = a + c + a = 2a + c , \\ A_0B_1 &= CB_1 - CA_0 = a + c - a = c , \\ AA_0 &= A_0B - AB = a - 2c . \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= (2a + c)^2 - c^2 + (a - 2c)^2 - a^2 \\ &= 4(a^2 + c^2) , \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\beta = \frac{abc}{a^2 + c^2} . \tag{5}$$

Pour avoir le rayon du cercle inscrit dans le segment BCU, il suffit de permuter a et c, ce qui laisse inchangée la valeur de β; d'où la seconde proposition.

7. — Bien entendu, de la même façon, on aurait, pour le rayon des cercles inscrits dans les segments ACV et CBV, la formule

$$\gamma = \frac{abc}{a^2 + b^2} . \tag{6}$$

Remarquons que les formules (4), (5), (6) peuvent être groupées sous la forme

$$a^2\alpha = (a^2 + c^2)\beta = (a^2 + b^2)\gamma = abc ,$$

et qu'on en déduit sans peine les relations remarquables

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\ .$$