

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 33 (1934)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LE CARACTÈRE ARBITRAIRE DE LA GÉOMÉTRIE DE L'UNIVERS  
**Autor:** Milner, S. R.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-25991>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 27.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# LE CARACTÈRE ARBITRAIRE DE LA GÉOMÉTRIE DE L'UNIVERS

PAR

S. R. MILNER (Université de Sheffield).

---

Le professeur E. A. Milne, dans un Mémoire de la *Zeitschrift für Astrophysik* (6. Heft. 1-2, 1933) rend compte d'une distribution invariante de particules formant un univers en expansion dans l'espace-temps plan; il expose que la géométrie adoptée dans les théories cosmogoniques peut être choisie arbitrairement, l'expression des lois de la Nature étant relative à la géométrie supposée. Une manière de voir analogue a été exposée par moi-même dans *Proc. Roy. Soc. A.* 139, p. 349, 1933. Cependant cette idée semble avoir été énoncée pour la première fois par H. Poincaré dans les tout premiers jours de la Relativité. Il est intéressant, sous ce rapport, de faire observer qu'il y a une méthode très simple de transformer la loi du mouvement d'une particule, exprimée dans la géométrie de la Théorie d'Einstein, en la loi correspondante exprimée dans toute autre géométrie.

Dans la Relativité généralisée la ligne-d'Univers d'une particule est une géodésique, une trajectoire quadridimensionnelle satisfaisant au principe

$$\delta \int ds = 0, \quad (1)$$

où

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} dx_{\mu} dx_{\nu}.$$

Les  $g$  sont ici fonctions de  $x_1, \dots, x_4$ , qui lorsqu'ils sont donnés fixent la géométrie de la multiplicité; les  $x$  étant des coordonnées de Gauss arbitraires, peuvent être supposés être les mesures de l'espace et du temps d'un observateur quelconque (d'habitude défini spécialement). En multipliant par une constante dimensionnelle et haut et bas par l'élément  $d\sigma$ , on peut écrire le principe géodésique sous la forme

$$\delta \int m \sqrt{\Sigma g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{d\sigma} \frac{dx_\nu}{d\sigma}} \cdot d\sigma = 0 . \quad (2)$$

Mais, sous cette forme, l'équation peut être interprétée dans toute géométrie. Ainsi, si  $d\sigma$  est l'intervalle d'une multiplicité quadridimensionnelle spécifiée quelconque, (2) devient un principe d'action stationnaire dans cette multiplicité,

$$\delta \int W d\sigma = 0 , \quad (3)$$

où  $W$ , la fonction de  $d\sigma$  est, avec les  $g$  donnés, une fonction connue des coordonnées et des cosinus directeurs de la trajectoire (maintenant courbe) en chaque point. Ou si nous remplaçons dans (2)  $\sigma$  par  $t$  de l'espace-temps plan nous avons directement le principe d'Hamilton

$$\delta \int L dt = 0$$

où la lagrangienne  $L$  est une fonction connue des coordonnées et des composantes de la vitesse. De là on obtient, par le procédé usuel, le mouvement de la particule dans l'espace ordinaire.

Les inductions philosophiques d'une telle transformation sont considérables. Le mouvement d'une particule étant décrit généralement comme une trajectoire d'action stationnaire (d'un rayon de lumière, action zéro), dans

$$\delta \int dA = \delta \int \frac{dA}{d\sigma} d\sigma = 0$$

l'élément invariant d'action  $dA$  peut être factorisé de manières arbitraires en gradient d'action  $\frac{dA}{d\sigma}$  et intervalle  $d\sigma$ . Ce dernier

fixe la géométrie et le premier la fonction  $W$  dans (3). Le physicien travaillant d'après les directives classiques adopte naturellement la géométrie la plus simple, espace-temps plat, renvoyant la charge d'expliquer le mouvement non uniforme à la fonction  $W$ , qui décrit, en effet, un « champ de force ». Le relativiste, allant à l'autre extrême, renvoie toute la charge à la géométrie. Mais bien que ces moyens extrêmes soient les plus simples, il est clair que la charge peut être distribuée arbitrairement entre  $W$  et  $d\sigma$ , ceux-ci étant des facteurs ajustables d'une chose plus fondamentale: l'action. L'action elle-même, comprenant les deux, dépasse les idées de géométrie.

Dans un mémoire publié en 1928 (*Proc. Roy. Soc., A.*, 120, p. 483, 1928) j'ai montré que les lois électromagnétiques peuvent également être exprimées par un principe d'action stationnaire

$$\delta \int dA = \delta \int \frac{dA}{dV} dV = 0$$

où  $dV$  est un élément de volume tétradimensionnel dans le champ. Le champ électromagnétique, par conséquent, comme le champ gravitationnel, est obtenu par une factorisation de l'action, mais faite différemment, les cofacteurs étant ici la densité d'action et l'élément de volume. Le premier de ces facteurs spécifie effectivement le champ car, dans l'espace-temps plat

$$\frac{dA}{dV} \equiv \frac{1}{2} \{ (e^2 - h^2)^2 + 4(eh)^2 \}^{\frac{1}{2}}$$

Puisque  $dV$ , comme  $d\sigma$ , peut être employé pour définir un type de géométrie, le caractère d'arbitraire dans la géométrie supposée s'applique aux deux classes de champ.

(Communiqué en traduction par Eug. NÉCULCÉA, Paris.)