Réunion de Zurich, 7 et 8 septembre 1934.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **33 (1934)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE SUISSE

Conférences et communications.

Réunion de Zurich, 7 et 8 septembre 1934.

La Société mathématique suisse a tenu sa vingt-quatrième assemblée annuelle à Zurich, les 7 et 8 septembre 1934, sous la présidence de M. le prof. W. Saxer (Zurich), en même temps que la cent-quinzième session annuelle de la Société helvétique des Sciences naturelles. En ouvrant la séance, le président rend hommage à la mémoire de M. C. F. Geiser, doyen des mathématiciens suisses, décédé le 7 mars 1934 à l'âge de 91 ans.

Les communications scientifiques, au nombre de treize, ont été réparties sur les matinées des 7 et 8 septembre.

Dans sa séance administrative, la Société a décidé de tenir une réunion extraordinaire au printemps de 1935 pour commémorer le vingt-cinquième anniversaire de sa fondation. L'Assemblée annuelle ordinaire aura lieu à *Einsiedeln*.

1. — J. J. Burckhardt (Zurich). — *Gruppen linearer inhomogener Substitutionen.* — Schœnflies et v. Fedorow ont établi, par une voie géométrique, une théorie des groupes discrets des substitutions linéaires non homogènes. Leur exposé qui est d'une grande clarté, permet de reconnaître toutes les particularités des groupes de mouvements; toutefois une question est restée sans réponse: on ne peut pas entrevoir la régularité avec laquelle les groupes sont distribués sur les classes. Pour élucider cette question nous avons présenté une théorie arithmétique [1]. Nous définissons les classes d'une manière arithmétique (ce sont les groupes des substitutions homogènes à coefficients entiers) et nous établissons les théorèmes suivants:

I. Si un tel groupe est cyclique de degré n et ne contient pas la représentation identique, il est l'origine d'un seul groupe de mouvements.

---

[1] Voir: J. J. Burckhardt, Zur Theorie der Bewegungsgruppen. *Commentarii Math. Helvet.*, vol. 6, p. 159.

II. Si un tel groupe cyclique d'ordre p contient la représentation identique une fois dans la diagonale, il est l'origine de p groupes de mouvements.

III. S'il contient la représentation identique plus d'une fois dans la diagonale, il est l'origine de deux groupes de mouvements.

IV. Si le groupe cyclique contient la représentation identique, mais pas dans la forme ci-dessus, il faut faire l'analyse des formes linéaires invariantes.

Pour faire l'analyse d'une classe quelconque G supposons que H soit un sous-groupe conjugué d'ordre maximum et que le problème soit résolu pour H et le sous-groupe G/H. On obtient alors les groupes pour G en combinant ceux de H avec ceux de G/H en observant une relation d'échange. Le groupe des automorphismes de H permet de choisir parmi ces groupes ceux qui ne sont pas équivalents. Cette théorie ne permet pas seulement d'obtenir les groupes de mouvements déjà connus, mais d'en trouver de nouveaux dans des espaces d'ordre supérieur à 3.

2. — M. Gut (Zurich). — *Ueber die Primideale im Wurzelkörper einer Gleichung.* — Le travail a paru sous le même titre dans les *Commentarii Math. Helvet.*, vol. 6, 1933/34, p. 185.

3. — M. Gut (Zurich). — *Ueber die Gradteilerzerlegung in gewissen relativ-ikosaedrischen Zahlkörpern.* — Le travail paraîtra dans le volume 7 des *Commentarii Math. Helvet.* et fait suite à deux autres travaux parus dans le même journal, vol. 4, 1932, p. 219 et vol. 6, 1933/34, p. 47.

4. — Rud. Fueter. — *Algèbres de quaternions et loi quadratique de réciprocité.* — D'après H. Brandt le nombre fondamental d'une algèbre de quaternions avec centre rationel est toujours divisible par un nombre impair de nombres premiers, si l'algèbre est définie, par un nombre pair de nombres premiers, si l'algèbre est indéfinie. L'auteur montre que ce théorème est identique avec la loi élémentaire de réciprocité des restes quadratiques. En effet à l'aide de cette loi on peut prouver le théorème et, d'autre part, la loi est une conséquence du théorème.

5. — G. Dumas (Lausanne). — *Maxima, minima, indicatrice.* — Soit O ($x = y = z = 0$) un point régulier d'une surface analytique en O,

$$F(x, y, z) = 0 , \qquad (S)$$

le plan des x, y coïncidant avec le plan tangent en O.

Du *polyèdre analytique* de (S) en O, on peut déduire une surface

$$z = \varphi(x, y) \ , \qquad \text{(J)}$$

qui, quand O est elliptique ou hyperbolique, se confond avec le paraboloïde de l'indicatrice et, dans les autres cas, caractérise souvent encore, la structure de (S) en O.

La discussion des maxima et minima de (S) en O se trouve élargie par l'introduction de (J); certaines questions, touchant la surface réciproque et la courbure totale de (S) en O, etc., se simplifient par ce moyen.

La méthode a, du reste, sa raison d'être dans le fait qu'une surface (S), analytique en un point O régulier pour elle, est, dans une large mesure, déterminée en ce point O, par l'intersection de (S) avec le plan tangent en O.

6. — R. Wavre (Genève). — *Sur les couches d'attraction nulle.*

Envisageons une surface analytique S chargée d'un simple couche de densité g et d'une double couche de densité f. Les densités sont supposées holomorphes sur S. Par la résolution d'un problème de Cauchy le potentiel créé par ces deux couches peut s'écrire:

$$\mathrm{U} = \int (p)\, d\mathrm{S} \qquad \text{en posant} \qquad \int (p)\, d\mathrm{S} = \frac{1}{4\pi}\int \left(\frac{1}{r}\frac{dp}{dn} - p\frac{d\frac{1}{r}}{dn} \right) d\mathrm{S} \ .$$

On sait que si l'on traverse la surface, le potentiel pris d'un côté et prolongé au travers de S est égal au potentiel pris de l'autre côté augmenté de la fonction p qui est harmonique au voisinage de la couche. Cette fonction p dite « de passage » est en même temps une fonction période pour U prolongé autour de la frontière de S. Cette surface peut très bien se recouper elle-même et ainsi diviser l'espace en plusieurs régions. Le potentiel U engendre en général des fonctions harmoniques distinctes dans chacune de ces régions.

Dès lors, il est très simple d'établir ceci: *Si la surface* S *est ouverte et la fonction de passage uniforme, il est impossible que le potentiel soit constant au voisinage d'un point.*

En effet, le potentiel constant serait prolongeable dans l'espace entier. En suivant un chemin qui aboutit à un point frontière M de S et qui devra éventuellement traverser une ou plusieurs fois la surface, on aurait au voisinage de M:

$$\int (p)\, d\mathrm{S} = c \pm np \ ,$$

c étant la valeur du potentiel et n un nombre entier. Mais le premier membre se ramifierait en M et il n'en serait pas de même du second. — C. Q. F. D.

Pour démontrer qu'une surface ouverte ne peut créer un potentiel constant, il faudrait établir que la fonction de passage peut s'admettre elle-même comme fonction période.

7. — F. Bäbler (Goettingen). — *Ueber glatte, ebene Kurven mit beschränkter Krümmung.* — Il s'agit d'un problème du calcul des variations qui peut être énoncé comme suit: Trouver la courbe à longueur maximum parmi toutes les courbes planes, avec une tangente continue et fermées sans des points multiples dont la courbure est plus petite ou égale 1, se trouvant à l'intérieur d'un cercle fixe déterminé (K).

Par une méthode géométrique tout à fait élémentaire, on obtient les résultats suivants:

1° Si le rayon de K est plus petit ou égale 2, le problème a une seule solution; elle est constituée par le cercle K lui-même.

2° Si le rayon de K est plus grand que $1 + 2/\sqrt{3}$, le problème n'a pas de sens, c'est-à-dire pour chaque grandeur positive (M) on peut trouver un nombre illimité de courbes entrant en considération, dont la longueur dépasse M. (Toutefois, parmi ces courbes il n'y en a pas d'une longueur infinie.)

3° Si le rayon de K est compris entre 2 et $1 + 2/\sqrt{3}$, la longueur des courbes entrant en considération est limitée.

Si l'on prend à la place du cercle K le plus grand diamètre des courbes et si l'on se donne pour tâche de trouver la courbe à longueur maximum pour un diamètre maximum fixement déterminé, laquelle remplit les hypothèses énumérées ci-dessus, on arrive à des résultats analogues. Dans ce cas le diamètre (4) joue le rôle du cercle avec le rayon $1 + \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

En ce qui concerne le domaine (g) entouré par la courbe on peut établir qu'il comprend toujours en entier au moins un cercle dont le rayon est 1. — Si le plus grand diamètre est supérieur à 4, g doit contenir au moinx 2 cercles séparés dont le rayon est 1.

La transposition des résultats n'offre pas la moindre difficulté, si la courbure se réduit à $\dfrac{1}{\rho}$ au lieu de 1.

8. — O. Brunner (Meilen, Zurich). — *Sur l'équation indéterminée* $z^3 - y^2 = D$. — Le théorème de M. R. Fueter publié dans les *Commentarii Math. Helvet.* (vol. 2, fasc. 1, p. 86) peut être aussi formulé sous des hypothèses moins complètes de la manière suivante:

Soit D *un nombre entier rationnel et positif qui est délivré des puissances sixièmes et qui contient seulement les nombres premiers impairs* *en puissance paire pour lesquels on a*

$$\left(\frac{-\mathrm{D}'}{p}\right)^{1} = -1 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{-3}{p}\right) = +1 \;;$$

alors l'équation indéterminée

$$z^3 - y^2 = \mathrm{D}$$

ne possède pas de solutions dans les cas où $\mathrm{D} \equiv 5$ *ou* $\equiv 7$ *(mod. 9)*, $\mathrm{D} \not\equiv -1$ *(mod. 4)*, $\mathrm{D} \not\equiv -4$ *(mod. 16) et* h, *c'est-à-dire le nombre des classes du corps* k $(\sqrt{-\mathrm{D}})$, *n'est pas divisible par trois.*

Si l'on suppose une solution y, z, t de $z^3 - y^2 = \mathrm{D}t^6$ [y, z, t étant des nombres entiers rationnels; $\mathrm{D} \equiv 5$ ou $\equiv 7$ (mod. 9)], de sorte que z n'a pas de diviseur p de D, pour lequel $\left(\frac{-\mathrm{D}'}{p}\right) = 1$ ($p = 2$ y compris), puis h ou t est $\equiv 0$ (mod. 3).

On trouve aussi une propriété pour les équations avec $\mathrm{D} \equiv 1$ ou $\equiv 8$ (mod. 9): Lorsque $z^3 - y^2 = \mathrm{D}t^6$ (D remplit du reste les mêmes conditions que dans la première proposition) possède une solution, il faut que h soit divisible par 3 ou y de même par 9.

En outre il résulte que *pour les équations* $z^3 - y^2 = \mathrm{D}t^6$, *où* D *est un nombre entier rationnel et positif qui est délivré des puissances sixièmes et n'a aucun facteur* 3, z *ne peut pas renfermer des nombres premiers impairs* p *qui paraissent dans* D *en puissance paire et pour lesquels on a*

$$p - \left(\frac{3\,\mathrm{D}'}{p}\right) \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ 3).$$

9. — L. Locher (Winterthur). — *Sur la solution d'un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants.* — Ces systèmes se présentent principalement dans l'étude analytique d'oscillations mécaniques et électriques. Les fonctions perturbatrices S (t) accuseront en général un point de discontinuité, vu que pour tous les $t < t_0$, S (t) est nul et que pour $t = t_0$ il s'ensuit un saut (fonctions de mise en circuit). Mais, lors de l'élimination des fonctions inconnues jusqu'à une seule, on est amené à des différentiations de S (t). Alors il s'agit de savoir comment les traiter en ce point t_0. Heaviside a donné une règle pour résoudre des cas simples. Dans la note publiée dans les *Commentarii Math. Helv.* (V. 7, f. 1, p. 47), j'ai traité le cas général et établi la solution en généralisant une méthode donnée par W. Gauster (*Arch. f. Elektrotechnik*, Bd. 24, p. 360, 1930).

---

[1] D′ = la partie de D qui ne contient aucun diviseur quadratique.

10. — A. Weinstein (Paris). — *Ueber das Helmholtzsche Problem der konformen Abbildung.* — La théorie des mouvements discontinus d'un fluide parfait pose un problème de représentation conforme bien distinct du problème de Riemann:

Problème. Transformer conformément la bande $0 < \psi < \frac{\pi}{2}$ du plan $f = \varphi + i\psi$ en un domaine du plan $z = x + iy$ limité par l'axe des x, par une ligne *donnée* ϖ et par une ligne *non donnée* λ, le long de laquelle la transformation cherchée multiplie les longueurs par une constante positive inconnue μ.

On peut dire qu'il s'agit d'un problème de représentation conforme avec une *condition quasi-isométrique* sur une partie de la frontière. La question de l'existence et de l'unicité de la solution a fait récemment de nouveaux progrès.

Unicité locale. Il ne peut exister deux solutions infiniment voisines de notre problème. Cette proposition a été ramenée (A. Weinstein, *Rend. d. Accad. Lincei*, 1927) à la proposition auxiliaire suivante:

Unicité locale au sens restreint. Il ne peut exister deux solutions infiniment voisines de notre problème qui correspondent à une même valeur de μ.

Ce théorème a été démontré succcssivement sous des conditions de moins en moins restrictives pour la ligne donnée ϖ par A. Weinstein, G. Hamel, H. Weyl. Une nouvelle démonstration de M. Friedrichs (*Math. Annalen*, 1933) permet d'étendre considérablement le champ de validité de ce théorème.

Unicité absolue (J. Leray-A. Weinstein, *C. R. Acad. d. Sc. Paris*, 1934). Cette proposition est une conséquence de l'unicité locale, du théorème d'existence (A. Weinstein, *Rend. d. Accad. d. Lincei*, 1927), du fait que les solutions forment un ensemble compact, ainsi que de l'unicité absolue de la solution dans le cas particulier où la ligne donnée est une demi-droite.

11. — E. Stiefel (Zurich). — *Parallélisme topologique dans une variété à trois dimensions.* — Considérons une surface sphérique immergée dans l'espace euclidien à trois dimensions, portant en chaque point un vecteur unitaire de cet espace; supposons que ce vecteur varie d'une manière continue avec son point d'application. On sait que, cette hypothèse étant remplie, au moins un vecteur de ce champ doit être orthogonal à la sphère considérée. Il en résulte l'impossibilité de trouver un champ vectoriel à la fois continu et tangent à la sphère. En introduisant la notion de vecteur sur une surface, ce théorème exprime une propriété intrinsèque de la sphère, indépendante de l'espace à trois dimensions: il n'existe pas de champ continu de vecteurs sur une surface sphérique.

Ce théorème est encore vrai pour une surface fermée et orientée quelconque, à l'exception des surfaces homéomorphes au tore

(Poincaré). La recherche des variétés orientées et closes à plusieurs dimensions, qui possèdent un champ continu de directions, a fait l'objet des études de plusieurs géomètres. M. H. Hopf a donné la réponse définitive à cette question en démontrant le théorème suivant:

La condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un champ vectoriel continu dans une variété à n *dimensions* M^n *est que la caractéristique eulérienne de* M^n *soit nulle* [1].

Une conséquence immédiate: il est toujours possible de construire un champ continu dans une variété à dimension impaire.

Il est facile de trouver sur une surface permettant la construction d'un champ continu un second champ de vecteurs continu et linéairement indépendant du premier; il suffit en effet de tourner chaque vecteur d'un angle de 90° dans le sens déterminé par l'orientation choisie. Dans une variété à deux dimensions l'existence de deux champs indépendants entr'eux est donc équivalente à l'existence d'un seul champ. L'analogue pour une variété à n dimensions n'est pas vrai: l'existence d'un seul champ ne suffit pas en général pour l'existence de n champs linéairement indépendants. M. H. Hopf m'a proposé de chercher les variétés admettant un champ continu de n vecteurs partout indépendants; cette recherche est d'une certaine importance pour l'*Analysis situs* des variétés à n dimensions et spécialement pour les variétés des groupes continus.

Un champ de cette espèce nous fournit en un point quelconque p de M^n une base pour les vecteurs en p; on peut donc définir les composantes d'un vecteur quelconque (relatives à cette base). Deux vecteurs de points d'application p et q seront dits parallèles, lorsque leurs composantes sont égales, et la variété elle-même est appelée une variété à parallélisme topologique. Les vecteurs parallèles à un vecteur donné forment un champ vectoriel continu, et la variété des éléments de ligne de M^n se compose de couches de champs de vecteurs parallèles; elle est donc au sens topologique le produit de M^n avec la sphère à $(n-1)$ dimensions S^{n-1}.

Je puis répondre à la question de M. H. Hopf en me bornant aux variétés à trois dimensions:

Chaque variété orientée close à trois dimensions admet un parallélisme topologique.

Ce théorème ne subsiste plus pour une variété à dimension supérieure: en effet le produit topologique d'une circonférence avec le plan projectif complexe est une variété à 5 dimensions, qui possède

---

[1] H. Hopf. Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. (*Math. Annalen* 96, S. 225-250.)

d'après le théorème de M. Hopf un champ vectoriel. On peut démontrer, qu'elle ne possède pas un parallélisme.

Je ne suis pas à même d'indiquer ici les méthodes de démonstration des résultats énoncés, je les donnerai ailleurs.

12. — A. Speiser (Zurich). — *Rapport sur la publication des Œuvres d'Euler.* — Vingt-quatre volumes ont paru jusqu'à ce jour; sept sont en préparation. Grâce aux dispositions nouvelles qui ont été adoptées par le Comité, l'impression d'un certain nombre de volumes sera confiée à la maison Orell-Füssli à Zurich. Des crédits fédéraux et cantonaux ont permis d'utiliser des chômeurs pour procéder à la reproduction photographique des nombreux manuscrits; pour cette partie tout est maintenant prêt pour la rédaction finale.

13. — Louis Kollros (Zurich). — *Sur les travaux mathématiques de C. F. Geiser.* — Voir la biographie et la liste des publications de C. F. Geiser dans les *Actes de la Société helvétique des Sciences naturelles*, 115me session, IIIe partie.

CHRONIQUE

La Médaille des Prix internationaux de Mathématiques.

Le Congrès international des mathématiciens, tenu à Zurich en septembre 1932, a eu le privilège d'enregistrer la création de deux Prix de mathématiques qui seront décernés tous les quatre ans à l'occasion des congrès internationaux. Ainsi que nous l'avons annoncé (31me année, p. 278), le prix consiste en une médaille en or qui sera fournie par une fondation due à l'initiative du regretté professeur J. C. Fields (1863-1932), de l'Université de Toronto. Le fonds a pu être créé grâce au solde resté disponible après la publication des *Proceedings* du Congrès de Toronto (1924).

L'exécution de la médaille a été confiée au sculpteur canadien Dr R. Tait McKensie, R.C.A. La planche encartée dans le présent fascicule en donne une reproduction en grandeur naturelle; le diamètre est de deux pouces et demi (env. 63,5 mm.). L'avers est à l'effigie d'Archimède, l'un des plus grands savants de tous les temps. De nombreux artistes des temps anciens et modernes ont cherché à représenter l'illustre géomètre de Syracuse. M. Tait McKensie s'est inspiré des portraits, au nombre de plus de trente, que l'on peut voir