1. — Le problème de Riemann.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **33 (1934)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

une chose qu'il ne faut pas négliger non plus, c'est la culture de l'intuition. C'est cette dernière qui nous fait saisir les rapports profonds des différentes branches des mathématiques et qui permet de les faire progresser parallèlement.

Ceci dit, j'aborde le sujet de ma conférence.

1. — Le problème de Riemann.

Le problème que je veux traiter est déjà ancien. Rappelons brièvement en quoi consiste une représentation conforme.

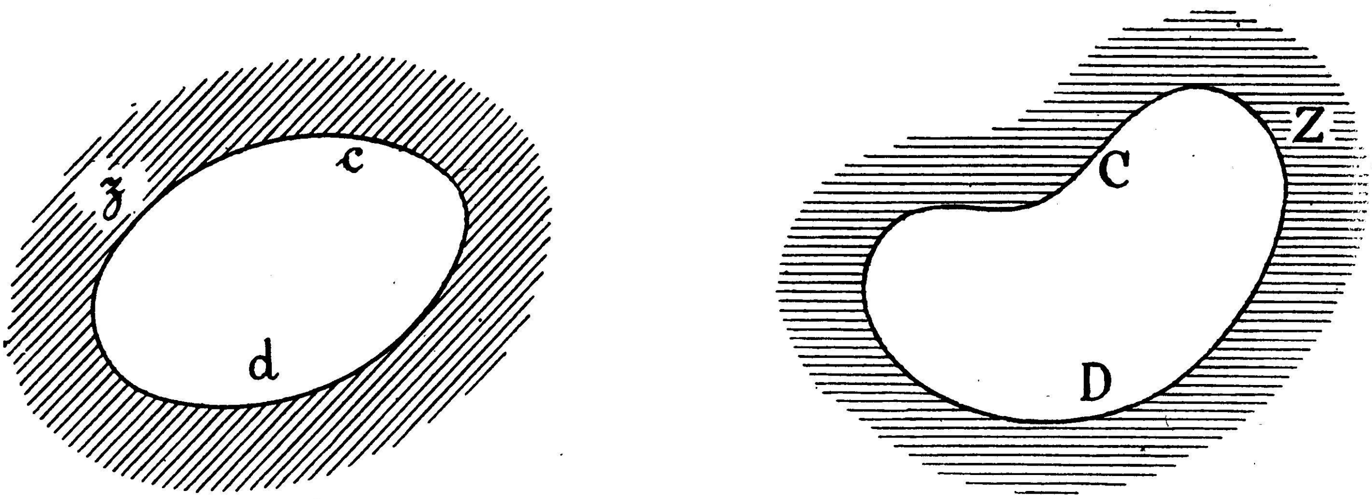

Fig. 1.

Envisageons deux aires, l'une d dans le plan de la variable complexe z, l'autre D dans le plan Z, limitées par deux courbes c et C régulières, simples et fermées. Représenter conformément les domaines d et D l'un sur l'autre, c'est établir entre leurs points une correspondance bi-univoque, conservant les angles et respectant leur sens. Cette correspondance ne peut être réalisée, comme on le sait, que par des fonctions holomorphes inverses l'une de l'autre

$$Z = f(z) , \qquad z = \varphi(Z)$$

telles que z parcourant d, Z passe par tous les points de D et une seule fois par chacun et réciproquement. Riemann fut le premier à se poser ce problème. Il a montré que la fonction f

dépendait de trois paramètres réels arbitraires dont on peut disposer pour que deux points donnés et deux directions données issues de ces points se correspondent.

Il est évident que la correspondance entre d et D sera établie si l'on peut représenter conformément chacun des deux domaines sur une aire canonique particulière, un cercle par exemple, et c'est ce que fait Riemann. Cette méthode de réduction du problème est générale en mathématique, elle intervient dans l'étude des transformations les plus générales, en géométrie, en algèbre et en arithmétique.

Postérieurement à Riemann, on s'est aperçu qu'il y avait lieu d'étudier des domaines pour lesquels la frontière n'était pas une courbe régulière. Le dernier en date des résultats importants obtenus dans cette direction est le suivant:

Toute aire simplement connexe dont la frontière contient plus d'un point peut être représentée conformément sur le cercle unité et l'on dispose encore, comme dans le cas précédent, de trois paramètres arbitraires.

2. — La connexion d'ordre n.

Mais pour aller plus loin, il importe de définir l'*ordre de connexion* d'un domaine. Je supposerai connu le langage de la théorie des ensembles.

Un domaine est un ensemble de points, tous intérieurs tels que deux quelconques d'entre eux puissent être reliés par une courbe de Jordan contenue elle-même dans le domaine.

La frontière peut se composer de n continus séparés. Dans ce cas, *l'ordre de connexion est* n. Un continu frontière peut, dans certains cas, se réduire à un seul point. On dira alors qu'il est dégénéré. Si un domaine n'a pas de point frontière, son ordre de connexion est nul. S'il est limité par une seule courbe fermée, il est dit simplement connexe. C'est le cas envisagé par Riemann. Un cercle dont on retranche le centre forme un domaine d'ordre 2, dont une frontière, à savoir le centre, est dégénérée; un cercle dont on retranche p cercles intérieurs sans point commun, est un domaine d'ordre $p + 1$. L'ordre peut être infini. A côté de