Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 33 (1934)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA REPRÉSENTATION CONFORME DES AIRES MULTIPLEMENT CONNEXES

Kapitel: 5. – LA REPRÉSENTATION CONFORME NON BIUNIVOQUE ET L'UNIFORMISATION SUIVANT POINCARÉ.

Autor: Julia, G.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-25992

frontière. Toutes ces $K(z)$ sont alors des fonctions rationnelles à coefficients réels de deux d'entre elles $r(z)$ et $s(z)$

$$K = \varphi(r, s) .$$

Les deux fonctions r et s sont alors liées par une équation algébrique à coefficients réels de genre p: $A(r, s) = 0$. (On sait que p est le nombre des intégrales abéliennes de première espèce associées à la courbe algébrique envisagée.) Ce résultat est-il surprenant ? Non !

Soit en effet $r(z)$ l'une des fonctions $K(z)$. Lorsque z décrit d, $r(z)$ décrit une surface de Riemann R_0 limitée par $p + 1$ contours *situés sur l'axe réel* (puisque ces contours correspondent aux contours limitant d, sur lesquels r est réel). La surface R_0' symétrique de R_0 par rapport à l'axe réel (surface décrite par $\overline{r(z)}$ — imaginaire conjuguée de $r(z)$ — lorsque r décrit d) peut être soudée à R_0 le long de ces $p + 1$ courbes et l'on obtient ainsi une surface de Riemann fermée de genre p. Cette surface R est l'image du domaine d pris avec ses deux faces: R_0 correspondant à l'une des faces, R_0' à l'autre; le domaine d ainsi considéré est bien une surface fermée de genre p: on peut en effet l'obtenir en aplatissant une surface fermée à p trous. A la classe des fonctions $K(z)$ correspond alors la classe des fonctions de r uniformes et méromorphes sur R et réelles sur les lignes de soudure de R_0 avec R_0' et grâce à cette correspondance, les résultats de Schottky se rattachent directement aux théorèmes de Riemann sur les fonctions algébriques.

5. — La représentation conforme non biunivoque et l'uniformisation suivant Poincaré.

Soit $F(z)$ une fonction définie dans un domaine d de genre p fini ou non. Elle sera supposée holomorphe ou au plus méromorphe dans d, mais elle sera, en général, multiforme, ce qui est fort possible puisque ce domaine est à connexions multiples. Considérons alors un point z de d et joignons-le à un point O quelconque par un chemin tout entier dans d. Deux chemins réductibles l'un à l'autre sans sortir de d seront considérés comme identiques. Un point auquel est ainsi associé un chemin sera dit un point analytique z. Un point géométrique z est donc la projection d'une infinité de points analytiques z_1, z_2, ... Les différents points z_1, z_2, ... peuvent être conçus comme appartenant à une infinité de feuillets distincts formant une surface de Riemann Σ recouvrant le domaine donné. C'est la *surface de recouvrement* de l'aire multiplement connexe. On passe d'un feuillet à l'autre par soudure le long des coupures pratiquées dans l'aire donnée pour la rendre simplement connexe. C'est un procédé bien connu. Par exemple, si d est l'anneau $1 < |z| < 2$, la surface Σ serait la portion d'un hélicoïde qui se projette sur l'anneau précédent, et un chemin qui fait m fois le tour de l'anneau parcourt m feuillets de l'hélicoïde. La fonction $F(z)$ considérée comme dépendant des points analytiques ne peut être qu'uniforme sur la surface simplement connexe Σ.

Le problème que résout Poincaré consiste alors en ceci: effectuer la représentation conforme biunivoque de la surface de Riemann Σ sur le cercle C de rayon unité. C'était là une idée extrêmement féconde en même temps que hardie. Cette correspondance

$$z = \varphi(\zeta)\,, \quad (1) \qquad \zeta = f(z)\,, \quad (2)$$

fera donc correspondre à tout point géométrique ζ de C un point analytique z de Σ et un seul et réciproquement. Mais à un point géométrique z de d correspondra en général une infinité de points analytiques de Σ: z_1, z_2, ..., donc une infinité de points géométriques ζ_1, ζ_2, ... de C. Ceci étant, la fonction $F(z)$ uniforme de point analytique z devient une fonction uniforme du point géométrique ζ

$$\mathcal{G}(\zeta) = F[\varphi(\zeta)]\,, \qquad (3)$$

et si l'on associe à (3) la relation (1), on a une représentation de z et de F au moyen de deux fonctions uniformes dans le cercle unité $|\zeta| < 1$.

C'est par la résolution du problème de Dirichlet, méthode du balayage, que Poincaré établit l'existence de la fonction uniformisante $\varphi(\zeta)$; aujourd'hui le procédé d'osculation de Koebe

(Schmiegungsverfahren) conduit au même but par une voie plus directe et plus élémentaire exposée dans mes Leçons sur la représentation conforme (*Cahiers scientifiques*, fascicules VIII et XIV) et je n'y insiste pas.

Soient

$$\zeta_1 = f_1(z) \qquad \text{et} \qquad \zeta_2 = f_2(z)$$

deux fonctions établissant la correspondance demandée entre Σ et C. On en déduit une relation, holomorphe elle aussi,

$$\zeta_2 = (\zeta_1) \; ,$$

qui transforme le cercle en lui-même. Mais une telle transformation est forcément homographique. Elle se réduit à l'identité $\zeta_2 \equiv \zeta_1$ si l'on s'impose que le centre du cercle corresponde à un point donné de la surface Σ et que deux directions données issues de ces points se correspondent également. La transformation est donc unique dans ces conditions-là.

Demandons-nous maintenant quelles sont les conditions pour que deux domaines d et d' puissent être mis en correspondance conforme.

Pour cela, une analyse plus approfondie de la relation entre Σ et C est nécessaire.

Le domaine d peut être rendu simplement connexe par p coupures joignant C_0 à $C_1 \dots C_p$. (Il s'agit ici de domaines de genre p fini.) Soit d_0 le domaine dont les coupures et les courbes C_i forment la frontière.

Chaque branche de la fonction $f(z)$ est uniforme dans d_0. Soit $f_i(z)$ l'une de ces branches. Il lui correspond un domaine D_i du cercle C. D_i est en correspondance conforme et biunivoque avec d_0. Ces domaines D_i, dits domaines de discontinuité, sont en nombre infini. Ils n'empiètent pas les uns sur les autres et remplissent le cercle C. L'on aboutit ainsi à un pavage de C au moyen des domaines D_i, pavage bien connu dans la théorie des fonctions fuchsiennes. Les D_i correspondent aux différents feuillets de la surface de recouvrement Σ de d. Envisageons deux branches

$$\zeta_i = f_i(z) \qquad \text{et} \qquad \zeta_j = f_j(z)$$

de la fonction multiforme $f(z)$. L'on aura encore

$$\zeta_i = \psi(\zeta_j)$$

ψ étant holomorphe dans C. Cette transformation du cercle en lui-même est de nouveau homographique. Nous la représenterons par $\zeta_i = S\zeta_j$. Ainsi deux branches quelconques de f sont liées par une substitution rationnelle et linéaire $\zeta_i = S\zeta_j$. Ces substitutions laissent invariante la fonction $z = \varphi(\zeta)$ qui reprend la même valeur aux deux points ζ_i et ζ_j.

Ces substitutions S forment un groupe, c'est-à-dire un ensemble tel que tout produit de substitutions de l'ensemble et les substitutions inverses appartiennent à l'ensemble.

Si l'on étudie la structure de ce groupe G, on s'aperçoit que le pavage précédent peut être obtenu, ainsi que toutes les substitutions du groupe, au moyen de p substitutions fondamentales, dépendant chacune de trois paramètres réels. $3p$ constantes réelles suffisent donc pour définir le groupe G en question.

Maintenant, supposons que deux domaines d et d' puissent être mis en correspondance conforme biunivoque l'un avec l'autre

$$z = z(z') \quad \text{et} \quad z' = z'(z) \tag{4}$$

et soient

$$\zeta = f(z) \quad \text{et} \quad \zeta' = f'(z') \tag{5}$$

les représentations sur le cercle unité des surfaces de recouvrement Σ et Σ', attachées à d et d', puis G et G$'$ les groupes qui leur sont attachés. On déduit de (4) et (5) l'existence d'une substitution

$$\zeta = \zeta(\zeta')$$

homographique qui dépend de trois paramètres.

Nous aurions donc deux transformations de Σ sur C:

$$\zeta = f(z) \quad \text{et} \quad \zeta' = f'[z'(z)]$$

admettant respectivement pour groupes G et G$'$. Or on sait qu'elles sont identiques, à une substitution homographique près. Donc G et G$'$ sont aussi identiques à une substitution homographique près.

Réciproquement, si ces groupes sont identiques, à un point z de d correspond une infinité de points ζ_i de C, qui résultent de l'un d'eux par G. Cette suite ζ_i est aussi une suite d'homologues d'un point z' de d'. Associons ce point z' au point z et nous aurons la correspondance biunivoque et conforme cherchée.

La condition nécessaire et suffisante pour que les deux domaines d et d' puissent être mis en correspondance conforme est donc que les groupes G et G′ soient identiques, à une substitution homographique près. Cela fait encore $3p - 3$ relations comme on le vérifie facilement d'après ce qui précède ($p > 1$).

En passant, signalons d'autres applications.

Dans une telle représentation de d sur C, les frontières se correspondent évidemment; à chaque c_n de d correspondent une infinité d'arcs sur la frontière Γ de C. La réunion de ces arcs relatifs à tous les c_n recouvre la circonférence entière à un ensemble de mesure nulle près.

La résolution du problème de Dirichlet pour le domaine d se ramène, par la fonction uniformisante de Poincaré $z = \varphi(\zeta)$, au même problème pour le cercle. La fonction cherchée devra prendre en les points de Γ les mêmes valeurs qu'aux points homologues des courbes c_n. L'intégrale de Poisson, dans laquelle un ensemble de mesure nulle situé sur Γ n'a aucune influence, d'après la théorie de M. Lebesgue, résoudra le problème.

Les domaines de discontinuité D_i sont limités par $2p$ arcs de la circonférence Γ (correspondant aux arcs délimités sur les contours c_n par les extrémités des p coupures pratiquées dans le domaine d), et, en outre, par $2p$ arcs de courbes intérieurs au cercle fondamental C, correspondant aux deux bords des coupures. Ceux qui correspondent aux deux bords d'une même coupure se correspondent par une substitution de G, et si les coupures sont pratiquées d'une manière convenable, ce sont des arcs de circonférences orthogonales à Γ.

Adjoignons à D_i son symétrique D'_i par rapport à Γ: on obtient un domaine $\overline{D_i}$ limité par $2p$ circonférences orthogonales à Γ, deux à deux homologues; en les raccordant convenablement, $\overline{D_i}$ devient une surface de Riemann orthosymétrique fermée de genre p, à laquelle est attachée une classe de courbes algébriques réelles: celle de Schottky que nous retrouvons ainsi.

Grâce à la fonction uniformisante $z = \varphi(\zeta)$ de Poincaré, toutes les fonctions $K(z)$ de Schottky envisagées précédemment, deviennent des fonctions uniformes de ζ dans C et admettant le groupe G. Elles sont réelles sur Γ et peuvent par suite être prolongées analytiquement à l'extérieur de C par le principe de symétrie. Les coordonnées r et s de la courbe algébrique réelle $A(r, s) = 0$ deviennent ainsi des fonctions uniformes de ζ, définies dans tout le plan [1], réelles sur Γ, invariantes par les substitutions de G: on retrouve ainsi une représentation paramétrique de la courbe $A(r, s) = 0$ par des fonctions fuchsiennes. Les domaines de discontinuité sont les $\overline{D}_i$; chacun d'eux représente la surface de Riemann R envisagée plus haut, D_i et D'_i correspondant respectivement à R_0 et R'_0.

6. — Les représentations de MM. de la Vallée Poussin et Julia.

En 1930, dans un beau mémoire des *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, M. de la Vallée Poussin introduisit de nouveaux domaines canoniques formés par des cassiniennes, c'est-à-dire par des courbes d'égal module d'un polynôme:

$$|P(u)| = \text{constante} .$$

Nous dirons que la cassinienne est de degré p si le degré du polynôme est p.

Les domaines de genre un se laissant représenter sur un anneau circulaire convenable

$$|u| = \begin{cases} e^{\lambda_0} \\ e^{\lambda_1} \end{cases} \qquad (\lambda_0 = 0 \ , \ \ \lambda_1 < \lambda_0) \ .$$

Il y avait lieu de se demander si un domaine de genre p pouvait être représenté sur des aires limitées par $p + 1$ cassiniennes de degré p

$$|P(u)| = \begin{cases} e^{\lambda_0} \\ \vdots \\ e^{\lambda_p} \end{cases} .$$

[1] Excepté sur un ensemble de mesure nulle situé sur Γ.