9. — Retour au point de vue algébrique.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **33 (1934)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Revenons au cas général de p quelconque et contentons-nous de décrire la disposition des cassiniennes. L'on aurait, en partant de Σ_1,

$$F(z) = \zeta = P(u) = (u - u_1) \ldots (u - u_p) .$$

Alors, le domaine canonique est limité: extérieurement, par la cassinienne $\Gamma_0 : |P(u)| = 1$ qui est régulière et entoure les p zéros de P; intérieurement, par p cassiniennes, tronquées ou non, $\Gamma_1 \ldots \Gamma_p$. Γ_p est un ovale (courbe régulière) entourant u_p seul. Les Γ_i intermédiaires se composent d'une boucle fermée entourant un seul zéro de P et de ν_i boucles tronquées suivant

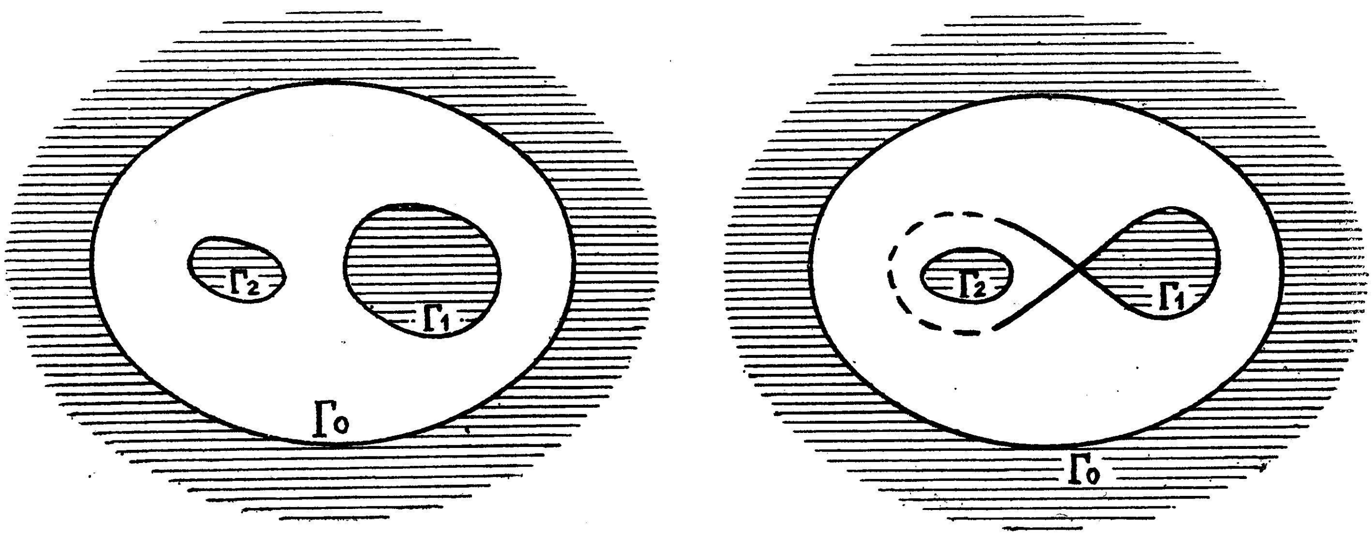

Fig. 5.

Disposition des cassiniennes pour $p = 2$.

des arcs qui correspondent aux arcs de passage, s'il y a $2\nu_i$ zéros de $F'(z)$ sur c_i; Γ_i a ν_i points doubles à tangentes rectangulaires. Topologiquement, les cassiniennes tronquées sont des courbes fermées, adjacentes à un ou plusieurs arbres extérieurs.

Partant de Σ_2 et de la relation $F(z) = R(u)$, les mêmes remarques subsisteront.

9. — Retour au point de vue algébrique.

Nous voudrions montrer enfin que ces résultats nouveaux peuvent être rattachés fortement aux recherches algébriques anciennes et notamment aux travaux de Schottky.

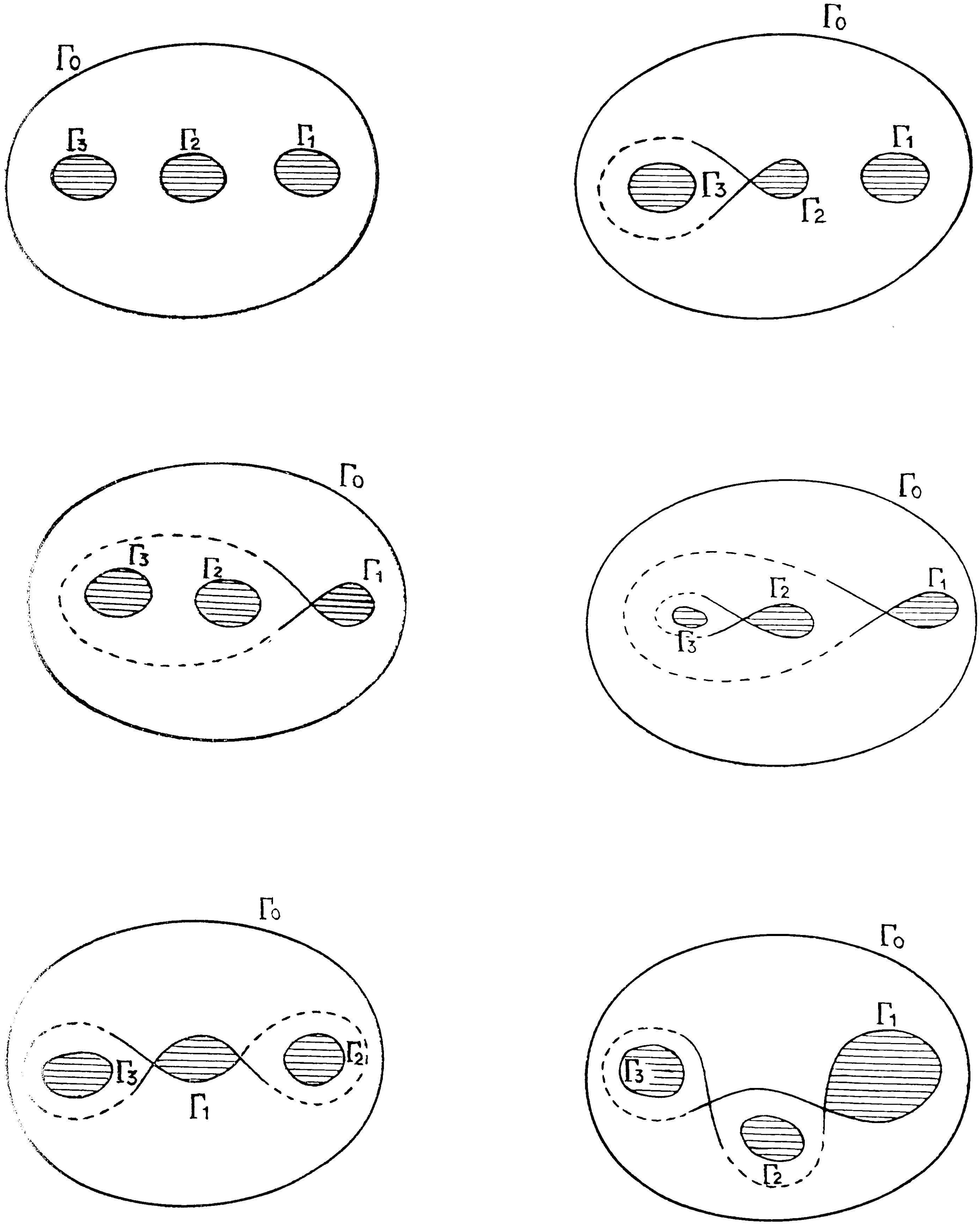

Fig. 6.

Disposition des cassiniennes pour $p = 3$.

Tout d'abord le problème de trouver les aires invariantes par des transformations biunivoques (directement ou inversement conformes) se ramène à la recherche des aires canoniques D invariantes par des déplacements ou des symétries non euclidiennes. Ce problème est identique au fond à celui de la détermination des courbes algébriques $A(r, s) = 0$ invariantes par des transformations birationnelles, problème complètement résolu par HURWITZ.

Envisageons la fonction $f(z) = \mathrm{L}\,\mathrm{F}(z) = \mathrm{U} + i\mathrm{V}$. Elle est analytique dans d, non uniforme, mais sa dérivée $f'(z)$ est uniforme, comme on le vérifie d'après la construction de V. $\mathrm{F}'(z)$ et $f'(z)$ ont les mêmes zéros avec le même ordre de multiplicité. $f'(z)$ est donc holomorphe et uniforme dans d et sur les contours.

Sur ces derniers U reste constant, $\dfrac{d\mathrm{U}}{d\sigma} = 0$, σ étant l'arc de c_i et l'on a

$$f'(z)\frac{dz}{d\sigma} = i\frac{d\mathrm{V}}{d\sigma} = -\,i\frac{d\mathrm{U}}{dn}$$

quantité purement imaginaire sur les frontières de d. La fonction f' est donc forcément liée aux fonctions $r(z)$ et $s(z)$ de SCHOTTKY, introduites précédemment. $r(z)$ étant méromorphe dans d et réelle sur c_i, il en sera de même pour

$$\frac{dr}{d\sigma} = r'(z)\frac{dz}{d\sigma}\ .$$

Le rapport $\dfrac{f'(z)}{ir'(z)}$ sera réel sur les c_i; il est uniforme et méromorphe dans d et sur sa frontière. C'est donc une fonction de la classe $\mathrm{K}(z)$, c'est-à-dire une fonction rationnelle R à coefficients réels des deux fonctions fondamentales $r(z)$ et $s(z)$ et l'on a

$$f'(z) = i\mathrm{R}(r\,,\ s)\,r'(z)\ .$$

Il en résulte que $f(z)$ est une intégrale abélienne attachée à la courbe algébrique $A(r, s) = 0$:

$$f(z) = i\int \mathrm{R}(r\,,\ s)\,dr\ .$$

Elle est de première espèce, parce que f reste fini d'après la construction de U et de V.

Soient σ la transformée biunivoque de d par $\zeta = F(z)$ et σ' sa symétrique par rapport à γ_0 et décrite, comme on sait, par le point

$$\zeta' = \frac{1}{\overline{\zeta}} = \frac{1}{\overline{F(z)}} .$$

$\overline{F(z)}$ est une fonction analytique du point qui décrit la face du disque d située en dessous du plan z. Donc $\sigma + \sigma'$ est ici l'image conforme du disque d à deux faces. Au point de vue topologique, on peut raccorder les points frontières symétriques par rapport à γ_0, et $\sigma + \sigma'$ devient une surface de Riemann orthosymétrique fermée de genre p, homéomorphe aux deux faces d'un disque à p trous. C'est la surface de Riemann-Clifford-Klein de la classe des courbes algébriques $A(r, s) = 0$ associées par Schottky à la classe d'aire d.

10. — Les domaines a connexion infinie.

Nous devrons nous contenter de quelques indications sur ce sujet et nous renvoyons pour le reste à la bibliographie. Les méthodes employées ici se rattachent presque toutes au travail de M. Hilbert publié en 1909 dans les *Gött. Nach.*, p. 314. M. Hilbert ne se restreint pas au terrain de la théorie des fonctions mais revient au calcul des variations. Il se rapproche ainsi de la méthode primitive de Riemann qui tentait de résoudre le problème de Dirichlet par la recherche d'une fonction φ rendant minimum l'intégrale

$$\int\int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy .$$

Il est intéressant de remarquer que les premiers pas faits dans le terrain des connexions infinies s'inspirent des considérations de minimum qui guidèrent Riemann dans le problème de Dirichlet et dans l'étude qui s'y rattache de la représentation conforme des aires simplement connexes.